負の整数の 2 進法表現・2 の補数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

情報処理の基礎　L04(2014-10-15 Wed)

今日の目標

- 10 進法で書かれた負の数を, 2 の補数を用いた 2 進法で書き直せる.
- 2 の補数を用いた 2 進法で書かれた負の数を, 10 進法で書き直せる.
- 2 の補数を用いた 2 進法が, 正の数の 2 進法の「自然な拡張」であることを説明できる.

http://hig3.net

L03-S1

Quiz 解答:半加算器

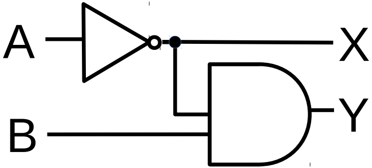
入力		出力	
A	B	X	Y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

L03-S2

Quiz 解答:真理値表から論理回路

X は A の否定 (0 を 1, 1 を 0 にしたもの) と気づく.

A の否定と B を入力と考えると, Y は, この 2 つの両方ともが 1 のときだけ 1 と気づく.



ここまで来たよ

1. 復習:演算装置
2. 負の整数の 2 進法表現・2 の補数
   - いろんな情報をメモリ上に置こう
   - ヘタレ 10 進電卓での負の数
   - 負の整数の 2 進表現
   - 演算装置:減算器

変数の型 (C の例)

C は強い型のあるプログラミング言語.
これらってどうやってコンピュータのメモリに格納されてるの?

- `int` 符号あり整数 情報処理の基礎 L04
  - 非負整数 情報処理の基礎 L01
  - 負整数 情報処理の基礎 L04
- `float`,`double` 浮動小数点数 `3.14`, `6.23E+23` 数値計算法及び実習 (2 前)
- `char` キャラクタ (文字) 情報処理の基礎 L05
- `char[]` 文字列 プログラミング及び実習 (2 前)
- `struct` 構造体 アルゴリズム及び実習 (2 後)

非負=0 または正 のこと.

- プログラム 情報処理の基礎 L13, 情報システム I(2 前), 記号処理 (3 前)
- 音声・音楽 情報処理の基礎 L06, パターン情報処理 (3 前)
- 画像 情報処理の基礎 L06, パターン情報処理 (3 前)
- 動画 情報処理の基礎 L06

ここまで来たよ

1. 復習:演算装置
2. 負の整数の 2 進法表現・2 の補数
   - いろんな情報をメモリ上に置こう
   - ヘタレ 10 進電卓での負の数
   - 負の整数の 2 進表現
   - 演算装置:減算器

たとえ話:ヘタレ 10 進電卓

整数 $n=6$ 桁しかない. $-$ は表示できない. 足し算 $+$ で 6 桁目に繰り上がっても無視. 引き算機能なし.

桁目	5	4	3	2	1	0
	0	0	3	7	7	6.

どうやって負の数をメモする?

案 1

$-99999 \sim +99999$

$-3776 \to$ 103776

$+3776 \to$ 003776

あれっ

もっといい案? 引き算を手がかりに

$10 - 10 = 0.$

$10 + \boxed{(-10)} = 0.$

これと同じ効果持つ 正の数ってない?

000010+$\boxed{}$=$\boxed{}$000000. オーバーフロー

案 2

(500000 を以上の数を負の数として使って) $\boxed{}$ を -10 の表現だと思おう.

他もうまくいく?

$1004 + \boxed{(-10)} = 994.$

001004 + $\boxed{}$=$\boxed{}$00994.

案 2 ではこんな対応

整数 m	電卓の表示 b
499999	499999
499998	499998
$\vdots$	$\vdots$
1	000001
0	000000
-1	999999
-2	999998
$\vdots$	$\vdots$
-16	$\boxed{}$
$\vdots$	$\vdots$
-499999	500001
-500000	500000

b の 2 つの読み方

- $b > 0$: そのまま読む
- $m = s(b)$: 符号つきとして読む
  $s(\text{499998}) = 499998$,
  $s(\text{500001}) = -499999$

$-m + b = 0$ or 10^n

ここまで来たよ

1. 復習:演算装置
2. 負の整数の 2 進法表現・2 の補数
   - いろんな情報をメモリ上に置こう
   - ヘタレ 10 進電卓での負の数
   - 負の整数の 2 進表現
   - 演算装置:減算器

2 進法の場合

電卓の例 整数 $\leftrightarrow$ 電卓の表示
これから 整数 $\leftrightarrow$ ビットパターン

頭リセット! 負の整数をビットパターンで表現したい

$n = 6$
$b = B_5 B_4 B_3 B_2 B_1 B_{0(2)}$.
案 1
B_5 を符号に使い, $B_4 \cdots B_0$ で絶対値を 2 進表示.
案 2
2 の補数を用いた表示
半/全加算器がそのまま使えるようにしたい!
$\cdots$ 定義の自然な拡張

2 の補数による負の整数の表示

$n=6$ ビット．$-2^{n-1} \le m \le 2^{n-1}-1$ を表現可能.

整数 m	ビットパターン b
$2^{n-1}-1=31$	011111
30	011110
$\vdots$	$\vdots$
1	000001
0	000000
-1	111111
-2	111110
$\vdots$	$\vdots$
-16	110000
$\vdots$	$\vdots$
-30	111110
$-(2^{n-1}-1)=-31$	100001
$-2^{n-1}=-32$	100000

方法 2: 負の数からビットパターンを求める方法 (左列から右列)

10 進法の負の整数 m から b を求める

$-2^{n-1} < m < 0$

1. $|m| = -m > 0$ をふつうの 2 進法で表すと $\to 0B_{n-2}X_{n-3}\cdots X_0$.
2. $b = \mathrm{Comp}_n(x) = 1B_{n-2}B_{n-3}\cdots B_0$.

x の 2 の補数 $b = \mathrm{Comp}_n(x)$ の定義

1. x のすべてのビットを，ビットごとに (bitwisely) 反転する．
   $\overline{x} = \overline{X_{n-1}}\cdots\overline{X_0}$
2. $\overline{x}$ が普通の 2 進法の整数だと思って $1_{(2)}$ を加えて得られた整数の 2 進法表示が $b = \mathrm{Comp}_n(x)$.

ビット反転 (NOT) の記号

$\overline{0} = 1, \overline{1} = 0, \overline{10} = 01.$

L04-Q3

Quiz(負の整数を 2 の補数表示)

10 進法で表した整数 m を, 2 の補数を用いた 2 進数表示で, n ビットのビットパターンで表現しよう.

$n = 6,\ m = -16_{(10)}$

L04-Q4

Quiz(2 の補数表示)

1. 自分の学籍番号の下 3 桁を $y > 0$ とする. $m = -y$ を書こう.
2. m の, $n = 8$ ビットの, 2 の補数を用いた 2 進数表示 b を求めよう.
3. b をチーム内の人に伝えよう.
4. チーム内の人から伝えられた b を, m に戻そう.
5. 交換して結果をチェックしよう. チェックしてくれた相手に, 学籍番号と名前を書いてもらおう.

この求め方でいい理由

負の整数 m と b との関係は, $-m+b=2^n$. b について解くと,

$$
\begin{aligned}
b =& 2^n - (-m) \\
&= (2^n - 1) - (-m) + 1 \\
&= \boxed{\underbrace{11\cdots11}_{n}{}_{(2)} - (-m)} + 1 \\
&= \overline{(-m)} + 1
\end{aligned}
$$

「2 の補数をとる」$=(-1)$ 倍

L04-Q5

Quiz(2 の補数)

次の n ビットのビットパターン b の, 2 の補数を求めよう.

$n=6, b=100001.$

「2 の補数をとる」$=(-1)$ 倍

$s(\mathrm{Comp}_n(b))=-s(b).$

方法 2: ビットパターンから負の数を求める方法 (右列から左列)

ビットパターン b から符号つき 10 進法の整数 $m = s(b)$ を求める

1. b の $n-1$ 桁目が 0 なら, 符号を忘れて (=前回までの方法で)10 進法に直す
2. b の $n-1$ 桁目が 1 なら,
   1. 2 の補数 $x = \mathrm{Comp}_n(b)$ を求める.
   2. x を, 符号を忘れて (=前回までの方法で)10 進法に直す. マイナス符号をつける.

L04-Q6

Quiz(2 の補数表示を 10 進法で)

2 の補数を用いた, 長さ n のビットパターン b を, 符号つき 10 進表示で表そう.

1. $n = 6, b = 000001.$
2. $n = 6, b = 100001.$

Quiz の続き

ここまで来たよ

1. 復習:演算装置
2. 負の整数の 2 進法表現・2 の補数
   - いろんな情報をメモリ上に置こう
   - ヘタレ 10 進電卓での負の数
   - 負の整数の 2 進表現
   - 演算装置:減算器

(-1) 倍する論理回路

$s(b) \times (-1) = s(x)$. 要するに $x = \mathrm{Comp}_n(b)$

B_{n-1} X_{n-1}

$\vdots$ $\vdots$

B_1 X_1

B_0 X_0

減算器

(-1) 器と加算器を流用しちゃえ!

$s(a) - s(b) = s(x)$

A_{n-1}

$\vdots$

A_1

A_0

B_{n-1}

$\vdots$

B_1

B_0

X_{n-1}

$\vdots$

X_1

X_0

減算器

もうちょっと楽な設計

$s(a) - s(b) = s(x)$

A_{n-1}
B_{n-1}
$\vdots$
A_1
B_1
A_0
B_0

X_{n-1}
$\vdots$
X_1
X_0

L04-Q7

Quiz(int 型変数のビット長)

あるコンピュータの C の (符号付き)int 型変数のビット長は 16 ビットであるという．この int 型変数で表現できる整数の範囲を求めよう．32 ビット, 64 ビットの場合は? 符号なしの整数については?

定義, ルールの自然な拡張 とは?

実数 x の絶対値

$$|x|_{\text{実}} = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

複素数 $z = x + iy$ の絶対値

$$|x+iy|_{\text{複}} = (x^2+y^2)^{1/2}$$
$$|x+iy|_{\text{ヘタレ複}} = |x| + |y|$$

ヘタレ/複素数の絶対値は実数の絶対値の拡張である

実複重なるところでは, どっちの定義で計算しても同じ結果になる.

$|x + i0|_{\text{複}} = |x|_{\text{実}}$, $|x + i0|_{\text{ヘタレ複}} = |x|_{\text{実}}$.

複素数の絶対値は実数の絶対値の自然な拡張である

実で成立した定理 (公式) が, 複でもそのまま成立する.

$|x \cdot y|_{\text{実}} = |x|_{\text{実}} \cdot |y|_{\text{実}}$.

$\updownarrow$

$|z \cdot w|_{\text{複}} = |z|_{\text{複}} \cdot |w|_{\text{複}}$, $|z \cdot w|_{\text{ヘタレ複}} \neq |z|_{\text{ヘタレ複}} \cdot |w|_{\text{ヘタレ複}}$.

次回の非参照 Quiz はこんなのり

自問自答して練習しよう.
L04-Q8

Quiz(負の整数を 2 の補数表示)

10 進法で表した整数 m を, 2 の補数を用いた 2 進数表示で, n ビットのビットパターンで表現しよう.

$n = 8$, $m = -100_{(10)}$
L04-Q9

Quiz(2 の補数表示を 10 進法で)

2 の補数を用いた, 長さ n のビットパターン b を, 符号つき 10 進表示で表そう.

$n = 8$, $b = 11111101$.

連絡

- 次回も 7-002 講義室．座席指定あり．
- 最初のころはいろいろ変更あるかも．メールに注意．実習室のときはいちおうイヤフォン持ってきて．
- 配布資料は 1-503 向かいの引出，`http://hig3.net` で再配布しています．
- Quiz の略解は `http://hig3.net` で配布しています．
- 予習問題，成績や略解は `http://hig3.net` → RaMMoodle から
- 大注意: 一度解答して，再度解答を開始して，そのままブラウザ閉じると，白紙答案 0 点になります．
- 非参照非相談テストの答案や成績や略解は `http://hig3.net` → RaMMoodle から

Schedule

- 予習問題 月 23:59 まで.
- 樋口のオフィスアワー 木 6(1-539), 金昼 (7-002/1-502).
- 2014-10-01 水昼 からチューターやってます (1-614).
- 2014-10-22 水昼 教職課程履修説明会 (必須) at どこか. これ終了後にみんなが到着してから非参照 Quiz やります.
- 2014-10-28 火 4, 29 水 14:00-17:00 数理情報学科特別講義.
- 2014-11-06 木 数学検定団体受検申込締切. `http://www.math.ryukoku.ac.jp/suken/` で受付中.
- 2014-12-06 土 34 数学検定団体受検.