線形代数☆演習 II 中間試験

樋口さぶろお[1] 配布: 2016-11-09 水更新: Time-stamp: "2016-11-21 Mon 06:51 JST hig"

中間試験参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

次の行列を行基本変形で簡約化しよう. 行列の階数を答えよう.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

2

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \{\left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2 | s, t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

は部分空間でない. このことを示そう.

3

次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の組を前のほうから順に求め, 他のベクトルをその 1 次結合で書き表そう.

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4

ベクトル空間 V のベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立であるとする.

ベクトル空間 V のベクトルの別の組 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 - 3\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{v}_5 = 2\boldsymbol{u}_3 + 2\boldsymbol{u}_4$ を考える.

1. $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)A$ と書くとき, 行列 A を求めよう (過程不要).
2. 組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$ から, 1 次独立な最大の組を前のほうから順に求め, 他のベクトルをその 1 次結合で書き表そう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

5

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^3$ の次のベクトルの組は, 1 次独立か, V を生成するか, V の基底か. ただし, 途中で行列の階数を求めるとき, その過程は書かなくてよい.

1. $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

6

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組 $1, x, x^2, x^3$ は 1 次独立である.
別のベクトルの組

$$f_1(x)=1+2x, f_2(x)=x+3x^2, f_3(x)=x^2+4x^3, f_4(x)=x^3$$

を考える.

1. $(f_1, f_2, f_3, f_4)=(1, x, x^2, x^3)A$ と書くとき, 行列 A を求めよう (過程不要).
2. この組は $V=\mathbb{R}[x]_3$ の基底かどうか答えよう.

7

ベクトル空間 $U=\mathbb{R}^3, V=\mathbb{R}^4$ と, $T(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\u_1+u_2\\0\\0\end{bmatrix}$ で定義される写像 $T: U\to V$ を考える.
写像 T が線形写像であることを, 定義に含まれる 2 つの性質を示すことにより, 証明しよう.

8

ベクトル空間 $U=\mathbb{R}^5, V=\mathbb{R}^3$ と線形写像 $T_A: U\to V$ ただし, $T_A(\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{u}$, を考える. ここで行列 A は

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2&0\\2&4&2&4&0\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

である.

1. 線形写像の像 $\mathrm{Im}(T_A)$ の基底をひとつ求めよう.
2. 線形写像の階数と, 核の次元を求めよう.

9

ベクトル空間 $U=\mathbb{R}^3, V=\mathbb{R}^4$ と線形写像 $T_A : U \to V$ ただし, $T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$, を考える. ここで行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

である.

1. 線形写像の核 $\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底をひとつ求めよう.
2. 線形写像の退化次数と, 像の次元を求めよう.

10

過程不要

ベクトル空間 V について, (常に) 正しいものに○, 誤っているもの (常に正しいとは限らないもの) に×をつけよう.

1. それぞれ V を生成するベクトルの組が 2 組あるとき, 2 組をまとめてできる組 (和集合としてできる組) は, やはり V を生成する.
2. それぞれ 1 次独立な V のベクトルの組が 2 組あるとき, 2 組をまとめてできる組 (和集合としてできる組) は, やはり 1 次独立である.
3. $\dim(V)$ 個未満のベクトルからなる組は, V を生成することはない.
4. $\dim(V)$ 個未満のベクトルからなる組は, 1 次独立である.
5. 1 次従属なベクトルの組があるとき, 組に属するどのベクトルも, 組に属する他のベクトルの 1 次結合で書ける.

線形代数☆演習 II 中間試験略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2016-11-09 水更新: Time-stamp: "2016-11-21 Mon 06:51 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です．参加者はすべての過程を記す必要があります．

配点　1-10 各 10 点, 計 100 点.

1

(変形の過程略)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

配点　rank=3 がわかる形に変形されていて 3 点．他の成分 7 点．計 10 点.

2

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$, $c = -1 \in \mathbb{R}$ を考えると, $c\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \notin W$ で (ぶ 3) が成立しないので反例になっている.

配点　計 10 点.

証明の作法として, $t > 0$ と限定せずに $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ について語ったものは不十分なので 3 点減点．具体的な反例 $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で書いた方がよっぽど簡単.

証明の作法として, $(-1)\boldsymbol{u} \notin V$ と言ってても $\boldsymbol{u} \in V$ と言ってないものは不十分なので 1 点減点.

3

$A = [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ を簡約化すると, $B = [\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_i$ の 1 次関係は同じなので, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立な最大の組． $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4 = 2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3$.

配点　行列の簡約化 3 点, 組 3 点, 1 次結合 2×2 点．計 10 点.

講評　前のほうから順に, なので, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4$ などは反則です.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)A,$$

ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{a}_4 \boldsymbol{a}_5]$$

とかける.

$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4$ は 1 次独立なので, $\boldsymbol{v}_i$ と $\boldsymbol{a}_i$ の 1 次関係は同じである.

A を簡約化すると,

$$B = [\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3 \boldsymbol{b}_4 \boldsymbol{b}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_i$ の 1 次関係も同じなので, 最大の組は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$, 他のベクトルは, $\boldsymbol{v}_5 = 2\boldsymbol{v}_4$ とかける.

配点 1:4 点, 2:組 3 点, 1 次結合 3 点. 計 10 点.

講評 前のほうから順に, です. 問題の前提, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4$ は 1 次独立, をどこで使ったのかわからないものは過程記述不足で -1 点.

5

1. 自明な 1 次関係 $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 = 0$ があるので 1 次独立でない. よって基底でない.
   ベクトルの個数 3 が $\dim(V)$ に等しいので, 基底でないことから V を生成しない.
2. 自明な 1 次関係 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = 0$ があるので 1 次独立でない. よって基底でない.
   行列 $[\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_4]$ を簡約化すると

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   となり行列の階数が 3 なので, $\dim(V) = 3$ である V を生成する.

配点 (1 次独立 2 点, 生成 2 点, 基底 1 点)$\times 2$. 計 10 点.

講評 過程不要とは書いてないでしょ.

1 次独立 and 生成 $=$ 基底, になってない解答は NG アンサー.

6

1. 1 次独立なベクトルの組 $1, x, x^2, x^3$ を使って,
$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, x, x^2, x^3)A$$
とかける. ただし,
$$A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 2&1&0&0 \\ 0&3&1&0 \\ 0&0&4&1 \end{bmatrix}.$$
2. A を簡約化すると,
$$B = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$
となり階数 4 である. 4 は f_i の組のベクトルの個数とも, $\dim(\mathbb{R}[x]_3)$ とも等しいので基底である.

配点　1:3 点, 2:A の簡約化 3 点, 基底であること 4 点, 計 10 点.

講評　ここでは, $(1, x, x^2, x^3)$ が 1 次独立であることは常識と思って, それが明示してなくても OK にしました. 式の次数を試験中に訂正したところで混乱した人もいたみたいですね. ごめんなさい.

7

(せ 1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ に対して
$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1+x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_1+y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}).$$
(せ 2) $\boldsymbol{x} \in U$, $c \in \mathbb{R}$ に対して,
$$T(c\boldsymbol{x}) = T(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ cx_1+cx_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ x_1+x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = cT(\boldsymbol{x})$$
よって T は線形写像である.

配点　せ 1:5 点, せ 2:5 点, 計 10 点.

講評　Trial にはなかったけど出題計画にははいってたでしょ.

8

1. 行列 A を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1&2&0&1&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

よって,

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

がひとつの基底.

2. 階数は上の基底をなすベクトルの個数で $\mathrm{rank} T_A = 2$, 核の次元は $\dim U - \mathrm{rank} T_A = 3$.

配点　1:簡約化 1 点, 基底 6 点, 2:階数 1 点, 核の次元 2 点, 計 10 点.

講評　1 は紙レポートと同じ問題.

1 で基底をひとつ求めよう，ってのは, 基底をなすベクトルのうちひとつを求めよう, とは違うからね. $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ は基底, $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ も基底, だけど, そういう基底ぜんぶを答える必要はないってこと.

サッカーチームをひとつ選べ，って言ったときに, 選手をひとり選んだらだめでしょ.

求めた基底をなすベクトルの個数と, 階数が一致してない解答は NG アンサー.

まあ簡約された行列の主成分の位置から暗算できるんだけど, 2 も理由書こうよ.

9

1. $A\boldsymbol{x} = 0$ の解を求める. A を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1&0&3\\ 0&1&2\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$$

なので, 解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix}, \quad (s \in \mathbb{R})$$

よって, 基底は,

$$\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix}$$

2. 退化次数は, 基底をなすベクトルの個数で $\mathrm{null}(T_A) = 1$. 像の次元は $\mathrm{Im}(T_A) = \dim(U) - \mathrm{null}(T_A) = 3 - 1 = 2$.

配点　1:簡約化 1 点, 基底 5 点, 2:階数 2 点, 核の次元 2 点, 計 10 点.

講評　1 は紙レポートと同じ問題.

$\mathrm{Ker}(T_A) = \begin{bmatrix}-3\\-2\\1\end{bmatrix}$ みたいな答は NG アンサー. 左辺はベクトル空間だけど, 右辺はベクトルでしょ. $1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ と同じくらいよくない.

10

○ × ○ × ×

配点　各 2 点, 計 10 点.