問題

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の個数 r と, r 個の 1 次独立なベクトルの組を 1 つ求め, 他のベクトルをこれらの 1 次結合で表そう.

$f_1(x) = x, f_2(x) = 1, f_3(x) = 2x - 1, f_4(x) = 2x + x^2.$

解答

1 次独立なベクトルの組 $(1, x, x^2, x^3)$ の 1 次結合で書いたときの行列を簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $r = 3$.

1 次独立なベクトルの組は f_1, f_2, f_4.

他のベクトルは, $f_3 = 2f_1 - f_2$.

問題

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の個数 r と, r 個の 1 次独立なベクトルの組を 1 つ求め, 他のベクトルをこれらの 1 次結合で表そう.

$f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = x + x^2, f_3(x) = x^2 + x^3, f_4(x) = x^3 + 1.$

解答

1 次独立なベクトルの組 $(1, x, x^2, x^3)$ の 1 次結合で書いたときの行列を簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $r = 3$.

1 次独立なベクトルの組は f_1, f_2, f_3.

他のベクトルは, $f_4 = -f_1 - f_2 + 2f_3$.

問題

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の個数 r と, r 個の 1 次独立なベクトルの組を 1 つ求め, 他のベクトルをこれらの 1 次結合で表そう.

$f_1(x) = x^3, f_2(x) = 1 + x^3, f_3(x) = 1, f_4(x) = 1 - x^3.$

解答

1 次独立なベクトルの組 $(1, x, x^2, x^3)$ の 1 次結合で書いたときの行列を簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $r = 2$.

1 次独立なベクトルの組は f_1, f_2.

他のベクトルは, $f_3 = -f_1 + f_2$, $f_4 = -2f_1 + f_2$.

問題

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の個数 r と, r 個の 1 次独立なベクトルの組を 1 つ求め, 他のベクトルをこれらの 1 次結合で表そう.

$f_1(x) = 2x + 3, f_2(x) = 0, f_3(x) = 4x + 5, f_4(x) = 1.$

解答

1 次独立なベクトルの組 $(1, x, x^2, x^3)$ の 1 次結合で書いたときの行列を簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $r = 3$.

1 次独立なベクトルの組は f_1, f_3.

他のベクトルは, $f_2 = 0, f_4 = 2f_2 - f_2$.

問題

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の個数 r と, r 個の 1 次独立なベクトルの組を 1 つ求め, 他のベクトルをこれらの 1 次結合で表そう.

$f_1(x) = 2x, f_2(x) = 2x+1, f_3(x) = 4x+3, f_4(x) = x^2.$

解答

1 次独立なベクトルの組 $(1, x, x^2, x^3)$ の 1 次結合で書いたときの行列を簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, $r = 3.$

1 次独立なベクトルの組は $f_1, f_2, f_4.$

他のベクトルは, $f_3 = -f_1 + 3f_2.$

問題

次の $\mathbb{R}[x]_3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の個数 r と, r 個の 1 次独立なベクトルの組を 1 つ求め, 他のベクトルをこれらの 1 次結合で表そう.

$f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2+1, f_3(x) = x^3+x^2+x+2, f_4(x) = x^2, f_5(x) = 1.$

解答

1 次独立なベクトルの組 $(1, x, x^2, x^3)$ の 1 次結合で書いたときの行列を簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

よって, $r = 4.$

1 次独立なベクトルの組は $f_1, f_2, f_3, f_4.$

他のベクトルは, $f_5 = f_2 - f_4$