

問題

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観 原点を通る直線なので部分空間である.

証明 (ぶ1) $t = 3$ とおくと, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \in W$.

(ぶ2) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ に対して, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ -2t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} t_2 \\ -2t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ とかける.

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 - 3 \\ -2(t_1 + t_2 - 3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$.

(ぶ3) 任意の $\mathbf{x} \in W$ に対して, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ とかける.

任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $c\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ct - (c-1)3 \\ -2(ct - (c-1)3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ より, $c\mathbf{x} \in W$.

別証明 さいしよに $s = t - 3$ とおいて, $W = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ と書き直して証明するのもあり.

問題

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観 原点を通る放物線だから部分空間でない.

証明 背理法による. 部分空間であると仮定する.

$t = 1$ とおいて $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ である.

(ぶ3) より $c = 2 \in \mathbb{R}$ に対して $c\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$.

よって, ある t で

$$\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるはずだが, 解 t が存在しないので, 矛盾.

説明 (ぶ2),(ぶ3) 不成立. (ぶ1) 成立.

問題

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観 原点を通る円周なので部分空間でない.

証明 略.

説明 (ぶ2),(ぶ3) 不成立. (ぶ1) 成立.

問題

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観 原点を端点とする半直線なので部分空間でない.

証明 略.

説明 (ぶ3) 不成立. (ぶ1),(ぶ2) 成立.

問題

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 \\ -3t^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観 原点を通る傾き -3 の直線なので部分空間である.

証明 略.

問題

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \tan t \\ 2 \tan t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |t| < +\frac{\pi}{2} \right\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観 原点を通る傾き 2 の直線なので部分空間である.

証明 略.