問題

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 | x_1+2x_2-2=2(2x_1+3x_2-1)\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観　原点を通る直線上のベクトル全体なので, 部分空間っぽい. 解空間なので部分空間である.

証明　$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 | 3x_1+4x_2=0\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ とかける. ただし, 行列 $A=\begin{pmatrix}3&4\end{pmatrix}$.

W は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間なので, 部分空間である.

別証明　$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 | 3x_1+4x_2=0\}$ とかける.

(ぶ 1) $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ は, $3\cdot 0+4\cdot 0=0$ より $\boldsymbol{0}\in W$.

(ぶ 2) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in W$ とすると, $3x_1+4x_2=0, 3y_1+4y_2=0$. $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は, $3z_1+4z_2=3(x_1+y_1)+4(x_2+y_2)=(3x_1+4x_2)+(3y_1+4y_2)=0+0=0$ を満たすので, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$.

(ぶ 3) $\boldsymbol{x}\in W$ とすると $3x_1+4x_2=0$.

$c\in\mathbb{R}$ に対して $\boldsymbol{z}=c\boldsymbol{x}$ は, $3z_1+4z_2=c(3x_1+4y_2)=0$ より, $c\boldsymbol{z}\in W$.

(ぶ 1),(ぶ 2),(ぶ 3) より, W は部分空間である.

問題

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 | (x_1-2x_2)^2+(2x_1-x_3)^2=0\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観　原点を通る直線上のベクトル全体なので, 部分空間っぽい. 解空間なので部分空間である.

証明　$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3|x_1-2x_2=0,2x_1-x_3=0\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2|A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$ とかける．ただし，$A=\left(\begin{smallmatrix}1&2&0\\2&0&-1\end{smallmatrix}\right)$ である．

W は $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間なので，部分空間である．

問題

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2|x_1+2x_2=1\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう．

解答

直観　原点を通らないので部分空間でない．

証明　$\mathbf{0}$ に対して，$0+2\cdot 0=0\neq 1$ なので，$\mathbf{0}\notin W$．**(ぶ 1)** が成立しないので部分空間ではない．

補足　**(ぶ 2)** の反例として $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ がある．いくらでもある．

(ぶ 3) の反例として $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), c=2$ がある．いくらでもある．

問題

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2|x_1^2-x_2^2=0\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう．

解答

直観　原点で交わる直線 2 本の和集合なので部分空間でない．各直線上に $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ をとると，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\notin W$．

証明　$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2|(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2|x_1-x_2=0$ または $x_1+x_2=0\}$．

$\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{y}=\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\in W$ をとると，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)\notin W$ であり，**(ぶ 2)** の反例になっている．

よって W は部分空間ではない．

補足　**(ぶ 1)**,**(ぶ 3)** は成立していて反例はない.

問題

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2|-2\le x_1\le +2,-3\le x_2\le +3\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観　長方形内のベクトルなので部分空間でない.

証明　$\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)\in W$, $c=2\in\mathbb{R}$ に対して, $c\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix}\right)\notin W$. これは **(ぶ 3)** の反例になっている.

よって W は部分空間ではない.

補足　**(ぶ 2)** の反例として $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)$ がある. いくらでもある.

(ぶ 1) は成立していて反例はない.

問題

ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^5$ の部分集合

$$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5|x_1+2x_2=0\}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

解答

直観　解空間なので部分空間である.

原点を含む超平面なので部分空間である.

証明　$W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5|x_1+2x_2=0\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ とかける. ただし, 行列 $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$.

W は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間なので, 部分空間である.