ベクトル空間・部分空間

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数☆演習 II L02(2016-09-23 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-09-24 Sat 09:52 JST hig"

今日の目標

- 三宅線形 (4.1)
- ベクトル空間・部分空間の定義を説明できる
- ベクトル空間の部分集合が, 部分空間であるかどうか直観で判定できる
- 部分空間である, ない証明が書ける

http://hig3.net

ここまで来たよ

1. ベクトル空間・部分空間
   - ベクトル空間
   - 部分空間
   - 問題

ベクトル空間

実数体 三宅線形 (p.63)

これまで, ベクトルを実数成分で考えたり, 複素数成分で考えたりした.
以下でやるベクトル空間も同様.
「(実数体) $\mathbb{R}$ 上の」ベクトル空間, 「実数係数のベクトル空間, などという.

ベクトル空間 三宅線形 (p.63)

「V の演算」とは, 結果が V の元になる計算のこと.

定義 (ベクトル空間)

V がベクトル空間であるとは,

零ベクトル定義の (3) が成立するか, $\mathbf{0}$ は何か, 意識しよう.

ベクトル空間の例 三宅線形 (p.64)

(5) 実数を成分とする $n \times m$ 行列全体は, 行列の和と, スカラー倍 (定数倍) によって, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる.

ここまで来たよ

部分空間 三宅線形 (p.64)

ベクトル空間の部分集合に対しては, ベクトル空間かどうかの判定が楽.
三宅線形 (定理 4.1.1) から,

- 部分空間であることを示すには, $\boxed{ぶ 1}$, $\boxed{ぶ 2}$, $\boxed{ぶ 3}$ がすべて成立していることを言えばいい.
- 部分空間でないことを示すには, $\boxed{ぶ 1}$, $\boxed{ぶ 2}$, $\boxed{ぶ 3}$ のいずれかが成立しないことを言えばいい. それには, $\boxed{ぶ 1}$ が成立しないことを言うか, $\boxed{ぶ 2}$ か $\boxed{ぶ 3}$ が成立しないような $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ や, $c, \boldsymbol{x}$ の例 (反例) をひとつ見せればいい.

部分空間である例でない例 ($\boxed{\text{三宅線形 (p.65)}}$のもっと易しい説明)

準備 (集合の記法など)

$\{x \in A | \boldsymbol{x}$ の条件 $\} = A$ の元のうち, 条件をみたす x の部分集合.

$\{x \in \mathbb{Z} | \, |x| \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とかく.

$V = \mathbb{R}^3$ の部分空間である例

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0\}$

$V = \mathbb{R}^3$ の部分空間である例

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = 0\}$

$V = \mathbb{R}^2$ の部分空間である例

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + 2x_2 = 0\}$

$\mathbb{R}^2$ の部分空間でない例

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 > 0\}$

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 \leq 0\}$

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 < 2\}$

$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 \times x_2 = 0\}$

解空間 (三宅線形 (p.65) の説明の整理)

定理

$V = \mathbb{R}^n$, A を m 行 n 列の行列とするとき, n 元連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える.
このとき, $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は V の部分空間である.

定義 (解空間)

ベクトル空間 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を「連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間」という.

これは, 「部分空間である」の判定に便利.

別の表し方をされた部分集合の，部分空間判定 (三宅線形 () になし)

$V=\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$
\begin{aligned}
W =& \left\{ s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| \, s,t\in\mathbb{R} \right\} \\
=& \left\{ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \middle| \text{ ある } s,t\in\mathbb{R} \text{ で } \boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ とかける} \right\} \\
=&
\end{aligned}
$$

この W は V の部分空間.

ここまで来たよ

1. ベクトル空間・部分空間
   - ベクトル空間
   - 部分空間
   - 問題

問題 I

♡: お奨め, ♠: やや難しい.

L02-Q1♡

Quiz(部分空間)

三宅線形 (4.1.1)

L02-Q2

Quiz(部分空間)

三宅線形 (問題 4.1.2)

L02-Q3

問題 II

Quiz(部分空間)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ の次の部分集合 W が部分空間であるかどうか調べよう.

1. $W = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$
2. $W = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$

L02-Q4 三宅線形 (問題 4.1 4)

L02-Q5 ♠ 三宅線形 (問題 4.1 3)

L02-Q6 ♠ 三宅線形 (問題 4.1 5)

連絡

- 次回は 7-002 講義室
- 配布資料は 1-503 向かい掲示板前の引出, `http://hig3.net` で再配布しています.
- オフィスアワー木 6 金昼 (1-502)
- 金 17:00-水 13:35 に予習復習問題=Trial 予想問題 をやろう.
  `http://hig3.net`→ https://learn.math.ryukoku.ac.jp/
- 次回の trial 出題計画
- 採点用略記号 ×N:NG ワード/アイデア, ×P:過程なし, ×か:考え方の誤り, ×き:記号の誤り, ×け:計算ミス