1 次独立・1 次従属

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数☆演習 II L03(2016-09-30 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-09-30 Fri 11:51 JST hig"

今日の目標

- 三宅線形 (§4.1) 三宅線形 (§4.2)
- 部分空間が $W = \{\phi(t) | t \text{ の条件 } \}$ の形のときに, 部分空間である, ない証明が書ける
- 列ベクトルの組が, 1 次独立か 1 次従属か判定できる

http://hig3.net

ここまで来たよ

1. ベクトル空間・部分空間
   - 部分集合のもうひとつの定義方法
   - 関数のベクトル空間
2. 1 次独立・1 次従属
   - 定義
   - 問題

部分集合のもうひとつの定義方法

外延的定義 $\leftrightarrow$ 内包的定義　　集合位相 (2 年)

整数の集合の例

$$
\begin{aligned}
W =&\{t^2 | t \text{ は } 0 \text{ 以上 } 5 \text{ 以下の整数} \} \\
=& \\
=&\{n | n \text{ は}, t \text{ は } 0 \text{ 以上 } 5 \text{ 以下の整数で } n = t^2 \text{ と書ける} \}
\end{aligned}
$$

次の書き方も同じこと.

「x を 0 以上 5 以下の整数とするとき, x^2 からなる集合を W とする」

部分集合のもうひとつの定義方法

$\{\sin \frac{1}{2}\pi t | t \in \mathbb{Z}\}$ の元を具体的に書こう. $\mathbb{Z}$ は整数全体.

もうひとつの方法で定義された集合に u が属するか?

$W = \{\phi(t) | t$ の条件 $\}$: 上のように定義された集合.

$u \in W$ を言うには?

$u \notin W$ を言うには?

ベクトルの例

$V = \mathbb{R}^3$. その部分集合 W_i.

例 1

$$\begin{aligned} W_1 = &\left\{ t \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \\ =&\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \text{ある } t \in \mathbb{R} \text{ で } \boldsymbol{x} = t \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \text{とかける} \} \\ =&\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\} \end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned} W_2 = &\left\{ s \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ =&\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \text{ある } s, t \in \mathbb{R} \text{ で } \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{とかける} \} \\ = & \end{aligned}$$

例 3

$$W_3 = \left\{ t \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

W_2 が部分空間である証明

(ぶ 1)
$s = t = 0$ とすると, $s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$ より, $\mathbf{0} \in W_2$.
(ぶ 2)
任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_2$ に対して, ある $s_1, t_1, s_2, t_2 \in \mathbb{R}$ で,

$$\boldsymbol{x} = s_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = s_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

とかける.
$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (s_1 + s_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (t_1 + t_2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ なので, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_2$.
(ぶ 3)
任意の $\boldsymbol{x} \in W_2$ に対して, ある $s, t \in \mathbb{R}$ で, $\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ とかける.
任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して, $c\boldsymbol{x} = (cs)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (ct)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ なので, $c\boldsymbol{x} \in W_2$.
(ぶ 1),(ぶ 2),(ぶ 3) が成り立つので, W_2 は部分空間.

W_3 が部分空間でない証明

背理法による.
W_3 が部分空間であると仮定する (背理法の仮定)
(ぶ 1) より $\mathbf{0} \in W_3$.
よって, ある $t \in \mathbb{R}$ があって,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この t についての 1 次方程式は解を持たない (第 2 成分をみると楽). 矛盾.
よって, W_3 は部分空間ではない.

背理法

A でないことを言いたいとき, A であることを仮定して (背理法の仮定) 矛盾を導けばいい.

L03-Q1

Quiz(部分空間)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ の次の部分集合 W が部分空間であるかどうか調べよう.

1. $W_1 = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$
2. $W_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}$
3. $W_3 = \left\{ s \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, s, t \in \mathbb{R}, t \leq 1 \right\}$

ここまで来たよ

関数のベクトル空間の例

- $\mathbb{R}[x]_n$ 三宅線形 (p.64(3))
- $C(a,b)$ 三宅線形 (p.64(4))
- $C^\infty(-\infty,+\infty)$ 実数全体で任意回微分可能な関数全体

$\exp(x), \sin(x), x^2, x^3+3x+1 \in C^\infty(-\infty,+\infty)$.
実は, $\mathbb{R}[x]_n$ は $C^\infty(-\infty,+\infty)$ の部分空間.

L03-Q2

Quiz(関数のベクトル空間の部分空間)

ベクトル空間 $V = C^{\infty}(-\infty, +\infty)$ (実軸上で任意回微分可能な関数全体) を考える. 次の部分集合は部分空間かどうか考えよう.

1. $W_1 = \{f \in C^{\infty}(-\infty, +\infty) |$ 任意の x に対して $f''(x) + 4f(x) = 0\}$
2. $W_2 = \{f \in C^{\infty}(-\infty, +\infty) |$ 任意の x に対して $f'(x) + 4x = 0\}$
3. $W_3 = \{f \in C^{\infty}(-\infty, +\infty) | f$ は偶関数 $\}$

L03-Q3

Quiz(関数のベクトル空間の部分空間)

ベクトル空間 $V = C^{\infty}(-\infty, +\infty)$ (実軸上で任意回微分可能な関数全体) を考える. 次の部分集合は部分空間かどうか考えよう.

1. $W_2 = \{A\cos(2x) + B\sin(2x) \in C^{\infty}(-\infty, +\infty) | A, B \in \mathbb{R}\}$
2. $W_1 = \{A\sin(2x + \theta) \in C^{\infty}(-\infty, +\infty) | A, \theta \in \mathbb{R}\}$
3. $W_3 = \{A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-5x} + 5\cos(2x) \in C^{\infty}(-\infty, +\infty) | A, B \in \mathbb{R}\}$

ここまで来たよ

1. ベクトル空間・部分空間
   - 部分集合のもうひとつの定義方法
   - 関数のベクトル空間
2. 1 次独立・1 次従属
   - 定義
   - 問題

1 次独立・1 次従属 三宅線形 (4.2)

1 次ナントカ=線形ナントカ 2 次元 線形代数及び演習 I(§3.7), n 次元 線形代数及び演習 I(§4.4).
1 次=線形=linear.
線形代数=linear algebra 線形代数及び演習 I()

(定義)1 次独立

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が自明でない 1 次関係を持たない.

自明

1 次結合の記法 三宅線形 (p.71)

V: 任意のベクトル空間
$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$: ベクトルの n 個組
A: $m \times n$ 行列
に対して,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A = (a_{11}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m, \cdots, a_{mn}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m)$$

$\boldsymbol{u}_i$ が k 次元列ベクトルなら見やすい. 行列の計算そのもの.

三宅線形 (定理 4.2.4)

V を任意のベクトル空間とする.
$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が 1 次独立なベクトルで, A が $m \times n$ 行列のとき,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$$

ならば $A = O$.

ここまで来たよ

1. ベクトル空間・部分空間
   - 部分集合のもうひとつの定義方法
   - 関数のベクトル空間
2. 1 次独立・1 次従属
   - 定義
   - 問題

L03-Q4　$\boxed{\text{三宅線形 (問題 4.2 1(1)-(6))}}$.

Hint. $\boxed{\text{三宅線形 (例題 4.2.1)}}$, $\boxed{\text{線形代数及び演習 I(4.4)}}$ を参考にしよう.

L03-Q5　$\boxed{\text{三宅線形 (問題 4.2 2)}}$ $\boxed{\text{三宅線形 (問題 4.2 3)}}$

連絡

- 配布資料は 1-503 向かい掲示板前の引出, `http://hig3.net` で再配布しています.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 金 17:00-水 13:35 に予習復習問題=Trial 予想問題 をやろう.
  `http://hig3.net`→ https://learn.math.ryukoku.ac.jp/
- 次回の trial 出題計画
- 次回の演習は 三宅線形 (4.2), 講義では 三宅線形 (4.2,4.3)