1 次独立・1 次従属

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数☆演習 II L04(2016-10-07 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-10-12 Wed 21:20 JST hig"

今日の目標

- 三宅線形 (§4.1) 三宅線形 (§4.2) 三宅線形 (§4.3)
- 部分空間が $W = \{\phi(t) | t$ の条件 $\}$ の形のときに, 部分空間である, ない証明が書ける
- ベクトルの組が, 1 次独立か 1 次従属か判定できる

http://hig3.net

Quiz(部分空間)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = \{ \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R} \}$$

が部分空間であるかどうか調べよう.

ここまで来たよ

1 次独立・1 次従属 三宅線形 (4.2)

(定義)1 次独立

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が自明でない 1 次関係を持たない,
つまり,
$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = 0$ ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ であるとき,
$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立であるという.

1 次結合の記法 三宅線形 (p.71)

V: 任意のベクトル空間
$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$: ベクトルの n 個組
A: $m \times n$ 行列
に対して,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A = (a_{11}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m, \cdots, a_{mn}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m)$$

例 $n = 2, m = 3, V = \mathbb{R}[x]_3$.

$$(x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = (1x + 4x^2, 2x + 5x^2, 3x + 6x^2)$$

例 $n=3, m=2, V=\mathbb{R}^5$.

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\\
=&\left(1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\\
=&\left(\begin{bmatrix}1\\3\\5\\5\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\4\\6\\6\\6\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

行列の計算と似てる.

三宅線形 (定理 4.2.4)

V を任意のベクトル空間とする.
$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が 1 次独立なベクトルで, A が $m \times n$ 行列のとき,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$$

ならば $A = O$.

ここまで来たよ

L04-Q1

Quiz(1 次独立・1 次従属)

三宅線形 (問題 4.2.1)

Hint. 三宅線形 (例題 4.2.1), 線形代数及び演習 I(4.4) を参考にしよう.

L04-Q2

Quiz(1 次独立)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ を考える. V の次のベクトルは 1 次独立か 1 次従属か調べよう.

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
6. $\mathbb{R}[x]_n$ のベクトルの n 個組 $1, x, \ldots, x^n$.
7. $\mathrm{C}^\infty(-\infty, \infty)$ のベクトルの n 個組 $\cos(2x), \sin(2x)$.

L04-Q3

Quiz(1 次独立)

V をベクトル空間とする．ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が 1 次独立であるとする．次のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ は 1 次独立か 1 次従属か調べよう．

1. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2.$
2. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2.$
3. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2.$
4. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}.$
5. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3.$

Hint. 三宅線形 (例題 4.2.2) を参考にしよう．

L04-Q4

Quiz(1 次独立・1 次従属)

三宅線形 (問題 4.2.2) 三宅線形 (問題 4.2.3)

Hint. 三宅線形 (例題 4.2.2) を参考にしよう.

三宅線形 (定理 4.3.2)

$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次独立な最大個数が r に等しい.
⇔(必要十分条件)
$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の中に r 個の 1 次独立なベクトルがあり, 他の $m - r$ 個のベクトルはこの r 個のベクトルの 1 次結合で書ける.

ここまで来たよ

1. 外延的定義によるベクトル空間
2. 1 次独立・1 次従属
   - 定義
   - 問題
3. ベクトルの 1 次独立な最大個数
   - 問題

L04-Q5

Quiz(最大独立なベクトルの数)

三宅線形 (問題 4.3.1)

Hint. 三宅線形 (例題 4.3.1) を参考にしよう.

Wolfram Alpha による行列簡約化

Web で Wolfram Alpha で検索 か
Web で `https://www.wolframalpha.com` か

LINE アプリの友だち追加で QR コード読み取り
アプリダウンロードでなく, ページ下部の ‘Continue to wolframalpha.com’ リンクを選択.
Google Play, AppStore にも安価な有料版アプリあります.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ の簡約行列を求めるには, 箱に半角英数で

```
row reduce { {1,5,2}, {6,8,3} }
```

と入力.
簡約行列 三宅線形 (2.2) =**reduced row** echelon matrix.
階段行列をもっと簡単にしたもの. 主成分は 1, 主成分の列の他の成分は

連絡

- 配布資料は 1-503 向かい掲示板前の引出, `http://hig3.net` で再配布しています.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 金 17:00-水 13:35 に予習復習問題=Trial 予想問題 をやろう.
  `http://hig3.net`→ https://learn.math.ryukoku.ac.jp/
- 次回の trial 出題計画
- 次回の演習は 三宅線形 (4.2,4.3), 講義では 三宅線形 (4.3,4.4)

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`