ベクトルの 1 次独立な最大の個数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数☆演習 II L05(2016-10-14 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-10-14 Fri 07:34 JST hig"

今日の目標

- 三宅線形 (§4.3) 三宅線形 (§4.4)
- ベクトルの組が与えられたとき, 最大の 1 次独立な組を取り出して, 他のベクトルをその 1 次結合で書ける 三宅線形 (例題 4.3.1) 三宅線形 (例題 4.3.2)
- ベクトル空間の基底の定義が説明できる

http://hig3.net

1 次独立・1 次従属なベクトルの組の例

$\mathbb{R}^n$ 三宅線形 (p.68)

$\mathbb{R}[x]_n$ 三宅線形 (p.68)

1 次独立・1 次従属の直観的な意味

$\mathbb{R}^n$

ここまで来たよ

1. 1 次独立・1 次従属

2. ベクトルの 1 次独立な最大の個数
   - ベクトルの 1 次独立な最大の個数
   - 問題
   - 数ベクトルでないベクトルの 1 次独立性
   - 問題

3. ベクトル空間の基底と次元
   - 基底の定義
   - 問題

「1 次独立なベクトルの大きな組」 は貴重で価値が高い
先週: 既製品の「ベクトルの組」が 1 次独立かどうか判定
今週: 原料の「1 次従属かもしれないベクトルの組」から「なるべく大きい 1 次独立なベクトルの組」を切り出す.

例

組 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

三宅線形 (定理 4.2.3)

- V: ベクトル空間.
- $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$: ベクトルの組
- $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$: ベクトルの組, ただし $n > m$(小さい)
- $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ はどれも $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書ける

ならば, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属.

例題 三宅線形 (例題 4.3.1)

三宅線形 (定理 4.3.2)

$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次独立な最大個数が r に等しい.
⇔(必要十分条件)
$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の中に r 個の 1 次独立なベクトルがあり, 他の $m-r$ 個のベクトルはこの r 個のベクトルの 1 次結合で書ける.

$\mathbb{R}^n$ のベクトル (数ベクトル) の場合 三宅線形 (定理 4.3.3)

($\mathbb{R}^n$ のベクトルを並べて作った) 数の行列 A に対して,

$$\begin{aligned}\mathrm{rank} A =& A \text{ の列ベクトルの 1 次独立な最大個数} \\ =& A \text{ の行ベクトルの 1 次独立な最大個数}\end{aligned}$$

三宅線形 (定理 4.3.4)

行列の簡約化は一意的 (unique=1 通りに定まる).
→ RREF=reduced row echelon form

主成分の位置は一意. 主成分以外のところの成分が問題. それらの成分は, 1 次独立なベクトルの組で, 他のベクトルを書いたときの係数だけど, それ一意なの?

1 次結合で書いたときの係数の一意性 三宅線形 (問題 4.2.6)

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表されるとき, $c_1, \cdots, c_m$ は一意的に定まる.

ここまで来たよ

L05-Q1

Quiz(1 次独立な最大の組)

次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組に対して, 1 次独立な最大の組を前のほうから順に求め, 他のベクトルをその 1 次結合で書き表そう.

1. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$
2. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

L05-Q2

Quiz(最大独立なベクトルの数)

三宅線形 (問題 4.3.1)

の (1),(2)

Hint. 三宅線形 (例題 4.3.1) を参考にしよう.

ここまで来たよ

三宅線形 (4.3.6)

V:ベクトル空間
$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$: 1 次独立なベクトルの組
$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$: (1 次独立かどうかわか r ない) ベクトルの組
$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$: (数の)$m \times n$ 行列.
に対して

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m)A$$

が成立するとき, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成立する.

意味: 謎のベクトル空間 V のベクトルの組 (v) でも, 1 次独立なベクトルが 1 組 (u) あれば, 数のベクトル (a) だと思って調べられる.

三宅線形 (p.79 いちばん下の注意).

ここまで来たよ

L05-Q3

Quiz(最大独立なベクトルの数)

三宅線形 (問題 4.3.1)

の (3),(4)
Hint. 三宅線形 (例題 4.3.2) を参考にしよう.

ここまで来たよ

1. 1 次独立・1 次従属
2. ベクトルの 1 次独立な最大の個数
   - ベクトルの 1 次独立な最大の個数
   - 問題
   - 数ベクトルでないベクトルの 1 次独立性
   - 問題
3. ベクトル空間の基底と次元
   - 基底の定義
   - 問題

基底の定義

定義 ベクトル空間 V のベクトルの集合 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ で生成される部分空間 三宅線形 (p.82)
$W = \{c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n | c_i \in \mathbb{R}\} = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle \subset V$.
定義 ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V を生成する 三宅線形 (p.81)
$\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle = V$.

定義 ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V の基底 (底=basis) である 三宅線形 (p.81)

1.
2.

定義 ベクトル空間の次元 $\dim(V)$ 三宅線形 (p.82)
基底に属するベクトルの個数. well-defined なの? $\rightarrow$ 三宅線形 (定理 4.4.2) $\rightarrow$ 三宅線形 (定理 4.2.3)

基底のイメージ

ここまで来たよ

L05-Q4

Quiz(ベクトルの組による生成)

次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか考えよう.

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

L05-Q5

Quiz(解空間の次元と基底)

三宅線形 (問題 4.4.1)

L05-Q6

Quiz(ベクトル空間の基底)

三宅線形 (問題 4.4.2)

L05-Q7

Quiz(ベクトル空間の基底)

三宅線形 (問題 4.4.3)

Wolfram Alpha による行列簡約化

Web で Wolfram Alpha で検索 か
Web で `https://www.wolframalpha.com` か

LINE アプリの友だち追加で QR コード読み取り
アプリダウンロードでなく, ページ下部の 'Continue to wolframalpha.com' リンクを選択.
Google Play, AppStore にも安価な有料版アプリあります.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ の簡約行列を求めるには, 箱に半角英数で

```
row reduce { {1,5,2}, {6,8,3} }
```

と入力.
簡約行列 三宅線形 (2.2) =**reduced row** echelon matrix.
階段行列をもっと簡単にしたもの. 主成分は 1, 主成分の列の他の成分は

連絡

- 配布資料は 1-503 向かい掲示板前の引出, `http://hig3.net` で再配布しています.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 金 17:00-水 13:35 に予習復習問題=Trial 予想問題 をやろう.
  `http://hig3.net`→ https://learn.math.ryukoku.ac.jp/
- 次回の trial 出題計画
- 次回の演習は 三宅線形 (§4.3) の p.78 以降と 三宅線形 (§4.4) の続き, 次回の講義は 三宅線形 (§4.4) の続き, 三宅線形 (§5)

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`