線形写像

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数☆演習 II L06(2016-10-21 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-10-21 Fri 06:57 JST hig"

今日の目標

- 三宅線形 (§4.4) 三宅線形 (§5.1)
- 基底かどうか, 楽して判定できる
- 部分空間の基底が求められる
- 写像が線形写像かどうか判定できる

http://hig3.net

ここまで来たよ

1. ベクトルの 1 次独立な最大の個数
   - 基底の定義
   - 問題
2. 線形写像
   - 問題
   - 線形写像の像と核

基底の定義

定義 ベクトル空間 V のベクトルの集合 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が生成する (張る) 部分空間 三宅線形 (p.82)
$W = \{c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n | c_i \in \mathbb{R}\} = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle \subset V.$
定義 ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V を生成する 三宅線形 (p.81)
$\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle = V.$

定義 ベクトルの組 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V の基底 (基=basis) である 三宅線形 (p.81)

1.
2.

定義 ベクトル空間の次元 $\dim(V)$ 三宅線形 (p.82)
基底に属するベクトルの個数. well-defined なの? $\rightarrow$ 三宅線形 (定理 4.4.1) $\rightarrow$ 三宅線形 (定理 4.2.3)

定理 4.4.1 の説明

三宅線形 (定理 4.4.1)

V: ベクトル空間
$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$: V の基底その 1
$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$: V の基底その 2
ならば $n = m$. (だからこれを $\dim(V)$ と定義できる (well-definedness))

定理 4.4.5 の説明

三宅線形 (定理 4.4.5)

V: ベクトル空間, $\dim(V) = n$.
$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$: V のベクトルの n 個組.
ならば,
基底である $\Leftrightarrow$ 1 次独立である $\Leftrightarrow$ V を生成する

基底かどうかの判定

n 個未満の組は V を生成できない. 三宅線形 (どの定理?)
n 個の組は一方の条件だけチェックすればいい. 三宅線形 (定理 4.4.5)
n 個より大きい組は 1 次独立になれない. 三宅線形 (どの定理?)

解空間の次元と基底 三宅線形 (p.83,84)

$V=\mathbb{R}^n$ ベクトル空間
$W=\{\boldsymbol{x}\in V|A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$($A$ は行列) という解空間タイプのベクトル空間 (V の部分空間) を考える. 三宅線形 (p.65)

解空間 W の基底の求め方

三宅線形 (例題 4.4.1) 参照. 線形代数☆演習 II(E06)L で やる予定.

定義 三宅線形 (p.83) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解
定理 三宅線形 (定理 4.4.3) 解空間の次元 $\dim(W) = n - \mathrm{rank} A$.
定義 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度 解空間の次元のこと.

ここまで来たよ

1. ベクトルの 1 次独立な最大の個数
   - 基底の定義
   - 問題
2. 線形写像
   - 問題
   - 線形写像の像と核

L06-Q1

Quiz(ベクトルの組による生成)

次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか考えよう.

1. $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

L06-Q2

Quiz(解空間の次元と基底)

三宅線形 (問題 4.4.1)

L06-Q3

Quiz(ベクトル空間の基底)

三宅線形 (問題 4.4.2)

L06-Q4

Quiz(ベクトル空間の基底)

三宅線形 (問題 4.4.3)

L06-Q5

Quiz(ベクトル空間の基底)

三宅線形 (問題 4.4.4)

線形写像の定義

U, V ベクトル空間
写像 $T : U \to V$

定義 T が線形写像 (1 次写像) とは, (し 1)(し 2) を満たすこと.

である例/でない例

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $T(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$ (絶対値)
2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $T(x) = 2x$
3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $T(x) = 2x + 1$
4. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $T(x) = x^2$
5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
   $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$. ただし $\boldsymbol{a}$ は定ベクトル.
6. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
   $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. ただし A は $m \times n$ 行列. 三宅線形 (p.87 例 1)

線形写像である証明の例

線形写像でない証明の例

ここまで来たよ

L06-Q6

Quiz(線形写像判定)

三宅線形 (問題 5.1.2)

ここまで来たよ

線形写像の像と核

定義 三宅線形 (p.88)

U, V: ベクトル空間
$T : U \to V$ 線形写像
$\mathrm{Im}(T) := \{T(\boldsymbol{u}) \in V | \boldsymbol{u} \in U\} = T(U)$ 像 イメージ
$\mathrm{Ker}(T) := \{\boldsymbol{u} \in U | T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \in V\}$ 核 カーネル

例

三宅線形 (定理 5.1.1) 像は V の部分空間, 核は U の部分空間.

中間試験やります! I

- **日時** 2016-11-09 水 3. ただし, 2016-11-03 木,04 金は授業がないので注意.
- **場所** 7-002. 個人別座席指定あります.
- **配点** 科目の 100 ピーナッツ中 40 ピーナッツ.
- **持込** なし. Wolfram|Alpha もなし.
- **おすすめの準備方法** 過去問はありません. 下の出題計画を参照して, すべての trial がスムーズにできるようになっておくとよいでしょう. 予習問題も再トライできます (点数は変化しません).

中間試験出題計画案

計画中です．．2016-11-03 木 に確定します (Web 参照)．多くの独立な小問からなる構成です．

- 部分空間チェック
- $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立/従属, 基底チェック
- 一般の V や $\mathbb{R}[x]_n$ の 1 次独立/従属, 基底チェック
- $\mathbb{R}^n$ の与えられたベクトルの組から 1 次独立な最大の組を見つける
- 一般の V や $\mathbb{R}[x]_n$ の与えられたベクトルの組から 1 次独立な最大の組を見つける
- 解空間の基底を作る
- 線形写像かどうか判定する
- 線形写像の核と像を求める
- $\cdots$
- $\cdots$
- $\cdots$

連絡

- 配布資料は 1-503 向かい掲示板前の引出, http://hig3.net で再配布しています.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)
- 金 17:00-水 13:35 に予習復習問題=Trial 予想問題 をやろう.
  http://hig3.net→ https://learn.math.ryukoku.ac.jp/
- 次回の trial 出題計画
- 次回の演習は 三宅線形 (§4.4 p83,83) 解空間の基底, 三宅線形 (§5.1). 次回の講義は 三宅線形 (§5.1) 像と核, その次元.

https://manaba.ryukoku.ac.jp