線形写像の像と核

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数☆演習 II L07(2016-10-28 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2016-11-05 Sat 12:22 JST hig"

今日の目標

- 三宅線形 (§5.1)
- 線形写像の像と核の定義が説明できる
- 線形写像の像と核の次元や基底が求められる
- 次元定理の意味が説明できる

http://hig3.net

1 次独立, 生成などの Wolfram|Alpha での求め方

http://www.wolframalpha.com

```
vector {1,0,0}, vector {0,1,1}, vector {0,-1,-1}
```

- linearly (in)dependent 1 次 (独立) 従属
- subspace generated=生成される部分空間

Wolfram Mathematica

- もっと高機能でほぼ同文法な数式処理ソフトウェア
- 実習室で使用可能
- 高価だけど, 数理の学生は自宅にもインストール可能
  https://www.a.math.ryukoku.ac.jp/mathematica/

ここまで来たよ

像と核

定義 三宅線形 (p.88)

U, V: ベクトル空間

$T : U \to V$ 線形写像 (U 定義域,V 終集合)

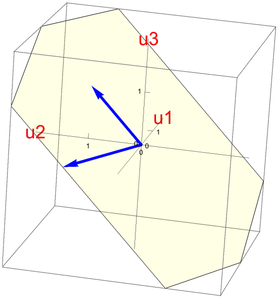
$\mathrm{Im}(T) := \{T(\boldsymbol{u}) \in V | \boldsymbol{u} \in U\}$ 像, image, イメージ

$\mathrm{Ker}(T) := \{\boldsymbol{u} \in U | T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V \in V\} = T^{-1}(\mathbf{0}_V)$ 核, kernel, カーネル

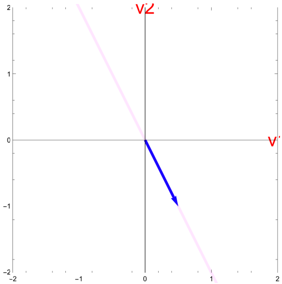
例

$U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $T_A : U \to V$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ のとき.

T_A:



$\to$



三宅線形 (定理 5.1.1)

U, V: ベクトル空間
$T : U \to V$ 線形写像

- $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間
- $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間

証明 三宅線形 (問題 5.1.1)

三宅線形 (例題 5.1.1) 解説

前半 ($\mathrm{Ker}(T_A)$ の基底) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の基底を, 三宅線形 (例題 4.4.1) のようにして求める.

後半 ($\mathrm{Im}(T_A)$ の基底) 行列 A の列ベクトルの中から, 三宅線形 (例題 4.3.1) のようにして選び出した 1 次独立な最大の組が基底 (のひとつ).

定義 三宅線形 (p.88)

$\mathrm{rank}(T) := \dim(\mathrm{Im}(T))$ 線形写像 T の階数, ランク

$\mathrm{null}(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T))$ 線形写像 T の退化次数

例

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$, $T_A : U \to V$.
$T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ とする (A は $n \times m$ 行列).

$$\begin{aligned} \mathrm{null}(T_A) &= n - \mathrm{rank}(A) \\ &= \dim(U) - \mathrm{rank}(T_A) \end{aligned}$$

三宅線形 (p.80)

一般に

次元定理 三宅線形 (定理 5.1.2)

U, V ベクトル空間
$T : U \to V$ 線形写像
のとき
$\mathrm{null}(T) = \dim(U) - \mathrm{rank}(T)$.

L07-Q1

Quiz(像と核の次元定理)

埋めよう. $\mathrm{Ker}(T_A), \mathrm{Im}(T_A)$ は基底を答えるか, 解空間として表すか, 絵を描くか.

	$T_A : U \to V$	A	$\mathrm{Ker}(T_A)$	$\mathrm{Im}(T_A)$	$\mathrm{null}(T_A)$	$\mathrm{rank}(T_A)$	$\dim(U)$
0	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
1	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
2	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
3	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$					
4	$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$					
5	$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$					
6	$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$					
7	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
8	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$					
9	$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$					
*	$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$					

ここまで来たよ

L07-Q2

Quiz(線形写像判定)

三宅線形 (問題 5.1.2)

L07-Q3

Quiz(像と核の次元と基底)

三宅線形 (問題 5.1.3)

三宅線形 (例題 5.1.1) を参考に.

L07-Q4

Quiz(像と核の次元定理)

線形写像 $T : U \to V$ で,

1. $\dim(U) = 5, \dim(V) = 3, \mathrm{null}(T) = 3$ のとき, 像 $T(U)$ の次元を求めよう.
2. $\dim(U) = 5, \dim(V) = 7, \mathrm{rank}(T) = 4$ のとき, 核 $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよう.

L07-Q5

Quiz(表現行列)

三宅線形 (問題 5.1.4)

中間試験やります! I

- **日時** 2016-11-09 水 3. ただし, 2016-11-03 木,04 金は授業がないので注意.
- **場所** 7-002. 個人別座席指定あります.
- **配点** 科目の 100 ピーナッツ中 40 ピーナッツ.
- **持込** なし. Wolfram|Alpha もなし.
- **おすすめの準備方法** 過去問はありません. 下の出題計画を参照して, すべての trial がスムーズにできるようになっておくとよいでしょう (ただし, 部分空間チェックは下の出題計画に含まれるもののみ). 予習問題も再トライできます (点数は変化しません).

中間試験出題計画 (案)

2016-11-03 木 に確定します (Web 参照). 多くの独立な小問からなる構成です.

- 部分空間チェック
- $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立/従属チェック
- 一般の V や $\mathbb{R}[x]_n$ の 1 次独立/従属チェック
- ベクトルの 1 次独立な最大の組を求めよう
- $\mathbb{R}^n$ の基底チェック
- 一般の V や $\mathbb{R}[x]_n$ の基底チェック
- 線形写像チェック
- 像や核の基底を求めよう
- 像や核の次元を求めよう
- $\vdots$
- 真偽選択問題

連絡

- 次回は座席指定なし (かも). Trial なし.
- 次回までの予習問題なし. かわりに
  - manaba course の (計算でない) レポート 期限 2016-11-02 水 13:35
  - 像と核の紙レポート Learn Math Moodle で問題が見られます. 演習中にやってもいいです. 期限 2016-11-10 木 13:30, 提出先 Math ラウンジ
- 次回の演習は 三宅線形 (§5.1), 講義は 三宅線形 (§5.2).
- 配布資料は 1-503 向かい掲示板前の引出, `http://hig3.net` で再配布しています.
- 樋口オフィスアワー木 6 金昼 (1-502), Math ラウンジ月-木昼 (1-614)

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`