

数理モデル基礎 演習I

樋口さぶろお¹ 配布: 2009-06-17 Wed 更新: Time-stamp: "2009-07-01 Wed 19:16 JST hig"

9 定数係数線形非斉次微分方程式を解こう!

今日の目標

- 定数係数斉次微分方程式の解き方を思い出そう!
- n 階線形非斉次微分方程式の解の構造を知ろう!
- 代入法で n 階線形非斉次微分方程式の特解を求めよう!

例題

9.1 n 階線形非斉次微分方程式

3階線形非斉次微分方程式

$$y''' + 3y'' - 4y = 4x^2 + 2, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -6.$$

を次の手順で解こう.

1. 斉次方程式の一般解を見つけよう.
2. 非斉次方程式の特解を見つけよう.
3. 非斉次方程式の一般解を求めよう.
4. 非斉次方程式の, 初期条件を満たす特解を求めよう.

9.2 n 階線形非斉次微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよう. 初期条件が与えられているものについては, 積分定数を定めて特解を求めよう.

- (1) $y'' + 5y' + 6y = -x^2 + 4x, \quad y(0) = \frac{5}{2}, y'(0) = -7.$
- (2) $y'' + 3y' + 2y = 2x + 1.$
- (3) $y'' + 4y' + 4y = 4x^2.$

¹Copyright ©2009 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

9.3 n 階線形非斉次微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよう。初期条件が与えられているものについては、積分定数を定めて特解を求めよう。

$$(1) \quad y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

$$(2) \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = x$$

$$(3) \quad y''' - 2y'' - 4y' = x - 7$$

9.4 n 階線形非斉次微分方程式

次の微分方程式の一般解を求めよう。初期条件が与えられているものについては、積分定数を定めて特解を求めよう。

Hint 斉次方程式の一般解は変数分離で求まる。非斉次方程式の特解は(未定係数法でも求まるかもしれないがここでは)代入法で。

$$(1) \quad y' + 2y = 4x^2, \quad y(0) = 1$$

$$(2) \quad y' + xy = x^2$$

$$(3) \quad y' + \frac{1}{x}y = 3x$$

9.5 いろいろ

1. $y''' - 4y'' - 2y' + 8y = 0$ の一般解を求めよう。
2. 関数 e^{2x}, xe^{2x} が一次独立であるかどうか判定しよう。
3. $y'' + 2y' + 4y = 8x^2 + 24x + 16$ の特解を求めよう。

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

一楽一楽 例題 41(p.86), 例題 42(p.86), 例題 42(p.88), 例題 42(p.88), 例題 49(p.97), 類題 49.1(p.98), 例題 50(p.99).

2 回目の授業の訂正 (同次型)

$$(x - y) \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

$$u' = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\tan^{-1} u - \frac{1}{2} \log |1+u^2| = \log |x| + C$$

$$2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - \log |1 + (\frac{y}{x})^2| - 2 \log |x| = C$$

$$2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - \log(x^2 + y^2) = C$$

$y(1) = 1$ とすると

$$2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - \log(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2} - \log 2.$$

黒板に書いた結果は正しくなかった. ごめん.

[目次](#) [前回](#) [次回](#) [今回の解答](#)