数理モデル基礎演習試験[1]

龍谷大学理工学部数理情報学科 2001 年 11 月 1 日樋口さぶろお[2]

次の微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ.

$$x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0. \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(1) これは 3 階線型同次なので, 一般解は, 1 次独立な 3 つの解の 1 次結合で書ける. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入すると,

$$0 = (\lambda^3 - 3\lambda + 2)\mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{4}$$

よって, $\lambda = 1$(重根),2. よって解は $\mathrm{e}^t, t\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-2t}$. のはずで, 実際, 1 次独立な解になっていることが確かめられる. 一般解は,

$$x(t) = (At + B)\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{-2t} \quad (A, B, C \text{ は積分定数}). \tag{5}$$

(2) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値を λ とすると, $(\lambda - 1)(-2 - \lambda) - 1 \cdot 4 = 0$ より, $\lambda = -3, 2$. 対応する固有ベクトルは, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ よって, $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とすると,

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ すなわち } A = T \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} T^{-1} \tag{6}$$

と対角化される. よって,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$\left(\begin{smallmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{smallmatrix}\right) = T^{-1} \left(\begin{smallmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{smallmatrix}\right)$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{-3t} \\ C_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \tag{8}$$

ここで C_1, C_2 は積分定数. ゆえに,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{-3t} \\ C_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \tag{9}$$

(3) 略解

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}. \tag{10}$$

---

[1] `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/`

[2] `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501