数理モデル基礎演習小テスト2[1]

龍谷大学理工学部数理情報学科 2001年12月20日樋口さぶろお[2]

問1

次の微分方程式を考える.

$$(-2x+y)+(x+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \quad \text{別の書き方では} \quad (-2x+y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

これが全微分型であることを示し, 解を $f(x,y)=$ 定数 の形に求めよ.

問2

次の微分方程式の平衡点をすべて求め, 線型近似を用いて, その型と (漸近) 安定性を判定せよ. (線型近似した問題の解の式は求めなくてよい)

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(t)\cdot(1-\frac{1}{2}x_1(t)-\frac{1}{2}x_2(t)) \\ x_2(t)\cdot(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x_1(t)) \end{pmatrix} \tag{2}$$

問3

微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(t)\cdot(-1+x_1(t)-\frac{1}{2}x_2(t)) \\ x_2(t)\cdot(-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}x_2(t)-\frac{1}{4}x_1(t)) \end{pmatrix} \tag{3}$$

の平衡点と, その周りの線型近似の結果は, 次のようである.

平衡点 (x_1,x_2)	固有値 λ_1	固有ベクトル $\vec{v}_1$	固有値 λ_2	固有ベクトル $\vec{v}_2$
$(0,0)$	-1	$\binom{1}{0}$	$-\frac{5}{2}$	$\binom{0}{1}$
$(0,\frac{5}{3})$	$-\frac{11}{6}$	$\binom{1}{5/52}=\binom{1}{0.09\cdots}$	$\frac{5}{2}$	$\binom{0}{1}$
$(1,0)$	1	$\binom{1}{0}$	$-\frac{11}{4}$	$\binom{1}{7.5}$
$(2,2)$	$\frac{5-\sqrt{3}}{2}=1.63\cdots$	$\binom{1}{(\sqrt{3}-1)/2}=\binom{1}{0.37\cdots}$	$\frac{5+\sqrt{3}}{2}=3.37\cdots$	$\binom{1}{-(\sqrt{3}+1)/2}=\binom{1}{-1.37\cdots}$

1. $x_1,x_2\geq 0$ での解軌道の様子を, ヌルクライン, 平衡点のまわりの線型近似などで特徴をとらえて描け (線型近似した問題の解の具体的な式は求めなくてよい).
2. $t\to\infty$ で, 平衡点 $(0,0)$, に近づくためには初期値 $(x_1(0),x_2(0))$ は, $x_1\geq 0, x_2\geq 0$ のうち, どの部分に属していればよいか. 図示せよ.
3. $t\to\infty$ で, 平衡点 $(1,0)$ に近づくためには初期値 $(x_1(0),x_2(0))$ は, $x_1\geq 0, x_2\geq 0$ のうち, どの部分に属していればよいか. 図示せよ.

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

略解

問 1

$\frac{\partial}{\partial y}(-2x+y) = \frac{\partial}{\partial x}(x+y)$ なので全微分型. 解は

$$-x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 = C \qquad (C \text{ は積分定数}). \tag{4}$$

問 2

平衡点は

$$x_1 \cdot (1 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2) = x_2 \cdot (-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}x_1) = 0 \tag{5}$$

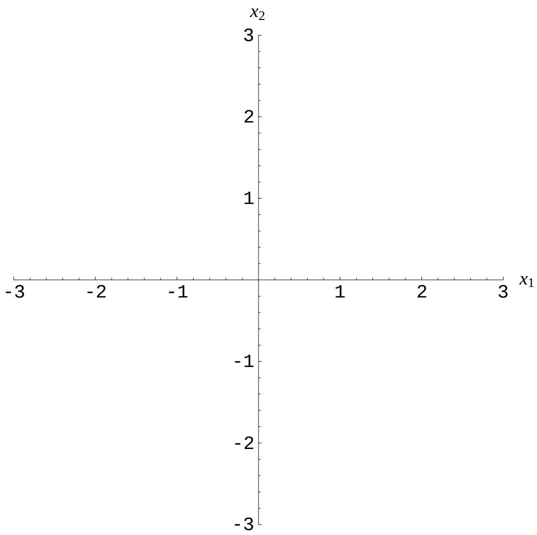
から求まる. 各点で Jacobi 行列

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

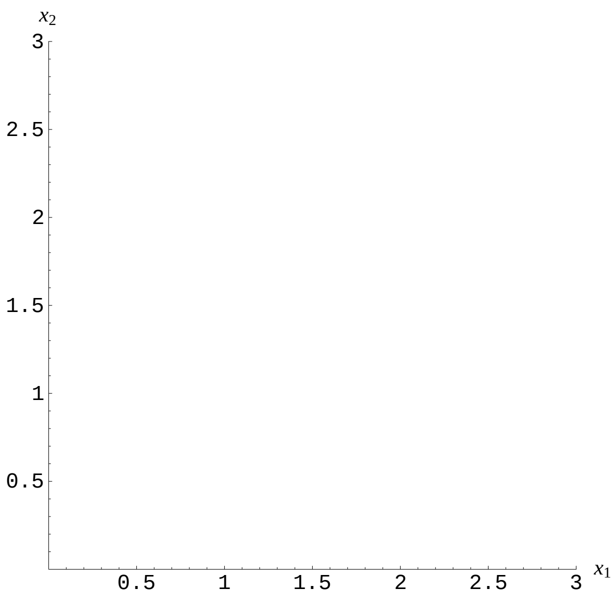
の固有値を求めると次のようになる.

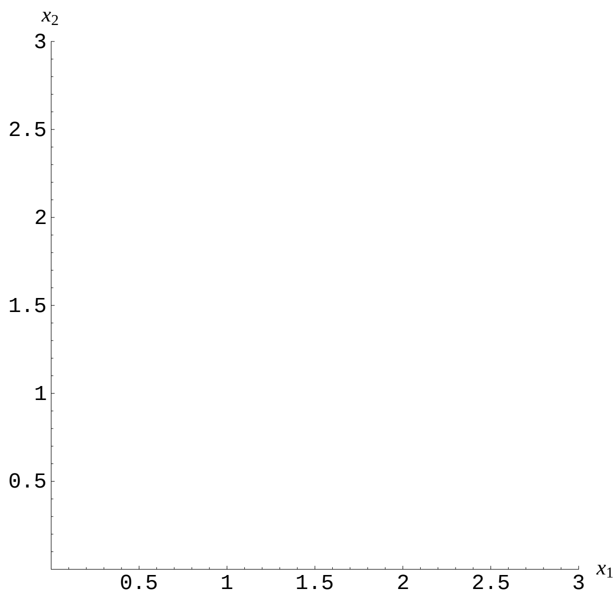
平衡点	固有値	型と安定性
$(0,0)$	$1, -\frac{1}{4}$	鞍状点. 不安定.
$(2,0)$	$-1, \frac{3}{4}$	鞍状点. 不安定.
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(-1 \pm \sqrt{11}i)/8$	渦状点. 漸近安定.

(参考)



問 3





お知らせ　答案は演習の時間に返却します, 得点はメイルでお知らせします.

略解

問 1

$\frac{\partial}{\partial y}(-2x+y) = \frac{\partial}{\partial x}(x+y)$ なので全微分型. 解は

$$-x^2 + \underbrace{xy}_{+\frac{1}{2}y^2} = C \quad (C \text{ は積分定数}). \tag{4}$$

問 2

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$

平衡点は

$$x_1 \cdot (1 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2) = x_2 \cdot (-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}x_1) = 0 \tag{5}$$

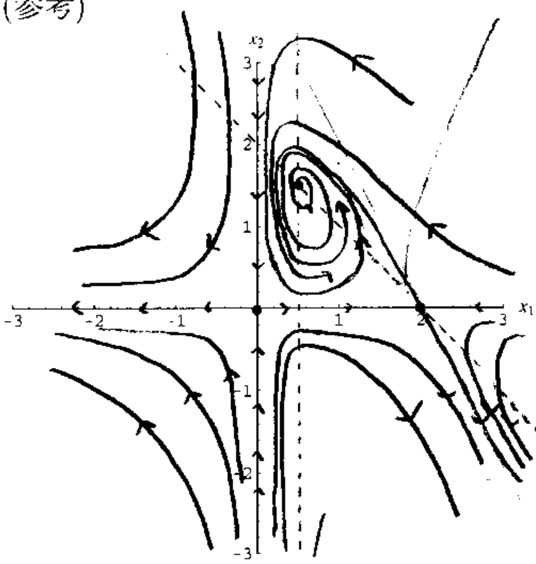
から求まる. 各点で Jacobi 行列

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

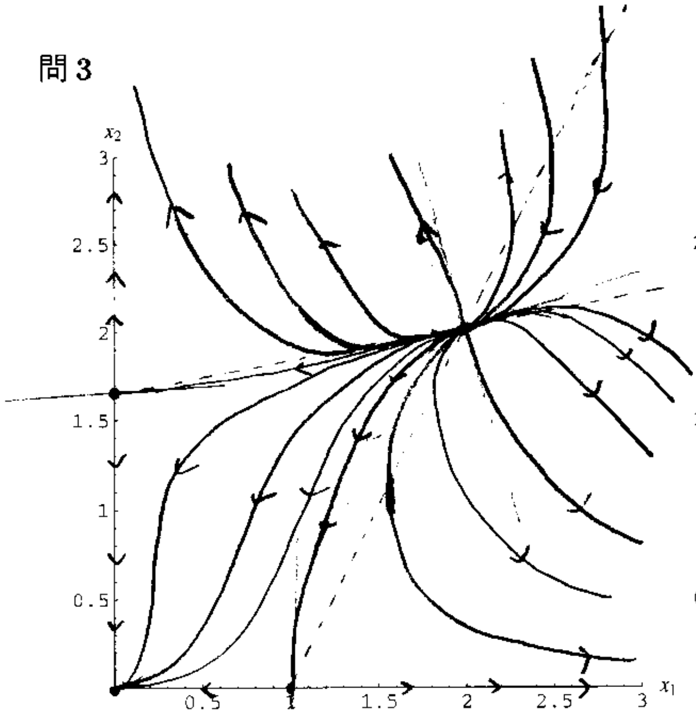
の固有値を求めると次のようになる.

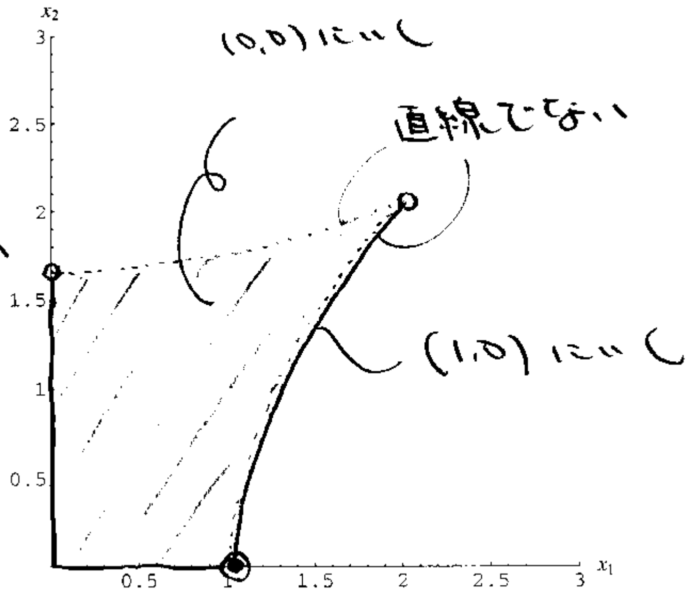
平衡点	固有値	型と安定性
$(0,0)$	$1, -\frac{1}{4}$	鞍状点. 不安定.
$(2,0)$	$-1, \frac{3}{4}$	鞍状点. 不安定.
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(-1 \pm \sqrt{11}i)/8$	渦状点. 漸近安定.

(参考)



問 3





お知らせ　答案は演習の時間に返却します, 得点はメイルでお知らせします.