数理モデル基礎/演習[1] 龍谷大学理工学部数理情報学科 2001年12月5日 樋口さぶろお[2]

25.1 2種競合系とお魚の運命

湖の鮒の数を $x_1(t)$, ブルーギルの数を $x_2(t)$ とする. 湖 1, 湖 2 では, この 2 種類の魚が競合していて, その数の変化は, それぞれ 微分方程式

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(t)(\frac{3}{2} - x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t)) \\ x_2(t)(2 - \frac{1}{2}x_2(t) - \frac{3}{2}x_1(t)) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(t)(1 - x_1(t) - x_2(t)) \\ x_2(t)(\frac{3}{2} - x_2(t) - x_1(t)) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

で支配されている.

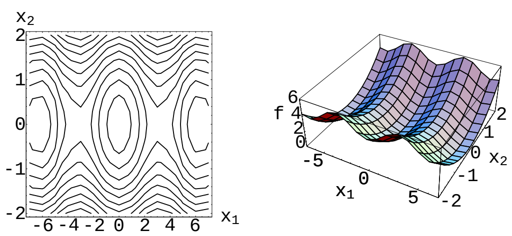
1. 平衡点とその安定性を求めよ.
2. 時間が十分経過したときに, その各々の平衡点に近づいていくためには, 初期条件 $(x_1(0), x_2(0))$ はどの範囲にあるべきか. 図示せよ.

25.2 安定性とエネルギー関数

空気抵抗のある振り子の運動を考える. ひもの長さ ℓ, 重力加速度 g, 質量 m, 空気抵抗の比例係数を $m\gamma$ とすると, 角度 $\theta(t)$ は,

$$m\ell\theta''(t) = -mg\sin\theta(t) - m\gamma\ell\theta'(t) \tag{3}$$

にしたがって変化する.



1. $x_1(t) = \theta(t), x_2(t) = \theta'(t)$ とおいて, 連立 1 階微分方程式に書き直せ.
2. 振り子のエネルギーは,

$$f(x_1, x_2) = (\text{運動エネルギー}) + (\text{位置エネルギー}) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}m(\ell x_2)^2 + mg\ell(1 - \cos x_1) \tag{5}$$

   となる. $f(0,0) = 0$ および, $|x_2| \leq 2\pi$ のとき $f(x_1, x_2) > 0$ を示せ. なお, 相空間で $f(x_1, x_2)$ は次のようになっている (グラフ, および等高線)

3. エネルギー $f(x_1(t), x_2(t))$ が t に関して単調減少であること, すなわち, $\frac{d}{dt}f(x_1(t), x_2(t)) \leq 0$ を示せ. このことから, 平衡点 $(0,0)$ は安定であることが分かる.

---

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/mathmodel/

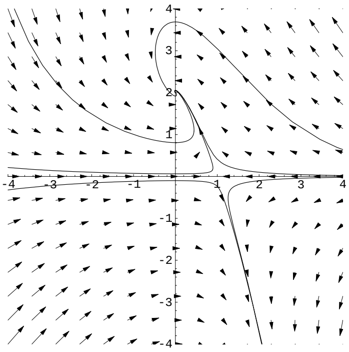
[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

24　略解

quiz

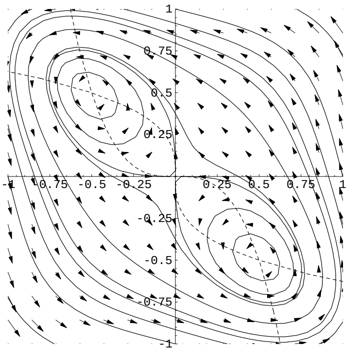
　次の微分方程式の平衡点をすべて求め，その近くで線型近似をおこなって，平衡点の型と (漸近) 安定性を判定せよ．

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2x_1(t) - x_2(t) + 2 \\ x_1(t) \times x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$



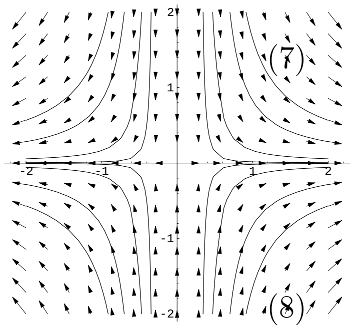
平衡点は $(0,2)$:反時計まわりの渦状点，漸近安定．$(1,0)$:鞍状点，不安定．(→ 図上)

24.1　自励系の解軌道



1. $x_1^4 + x_1 x_2 + x_2^4 = C$ (→ 図中)
2. $(0,0)$ 鞍状点，不安定．$(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})$ 渦心点，安定．

24.2　自励系の平衡点の安定性



1. 原点のまわりでは，

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

　となる．安定結節点に見える．

2. $x_1'(t) = x_1(t)^3$ を積分すると，$x_1(t) = \pm(C - 2t)^{-1/2}$．一方，

$$x_2 = \frac{C'}{x_1} \mathrm{e}^{1/(2x_1^2)}. \tag{8}$$

3. したがって，x_2 に関係なく，$|x_1|$ は t について単調増加．よって，不安定.(→ 図下)

24.3　自励系としての減衰振動子

1. 略．
2.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\gamma v(t) - \omega^2 x(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

3. 調和振動=渦心点，減衰振動=安定渦状点，臨界制動=変則的安定結節点，過減衰=安定結節点．