

平衡点と微小振動の例

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

現象の数学 B L04(2012-10-16 Tue)

今日の目標

- ① ばねとは限らない力に対して運動方程式と平衡点が求められる
- ② 平衡点のまわりの微小振動の周波数が求められる



<http://hig3.net>

Quiz 解答:微小振動の周期を求めよう!

- ① $3x''(t) = \sqrt{3} - 2 \cos x$.
- ② $F(x) = \sqrt{3} - 2 \cos x = 0$ を解いて, 平衡点は $x = \pm \frac{1}{6}\pi$.
- ③ $F'(x) = +2 \sin x$. $F'(+\frac{1}{6}\pi) = 1 > 0$, $F'(-\frac{1}{6}\pi) = -1 < 0$ より, 安定な平衡点は $x = -\frac{1}{6}\pi$.

平衡点の復習

運動方程式 $mx''(t) = F(x(t))$.

x_0 が平衡点 $\Leftrightarrow F(x_0) = 0$.

平衡点 $x(t) = x_0$ は特解

なぜなら

$F(x)$ が 1 次式 (ばねの力) のとき

$u(x) = x(t) - x_0$ は斉次方程式を満たす. なぜなら

左辺 $mx''(t) = mu''(t)$.

右辺 $F(x(t)) = -k \times (x(t) - x_0)$ のはず. 右辺 $= -ku(t)$.

よって一般解は, $x(t) =$ 単振動 ($u(t)$ の一般解) $+ x_0$

Quiz(重力+ばねの運動方程式)

鉛直下向きの重力がはたらく (重力加速度の大きさ g).

質量 m の物体を, 自然長 l , ばね定数 k のばねの一端にとりつけ, 天井からつり下げた.

天井を原点とする鉛直下向きの x 軸をとって考える.

- ① 運動方程式を書こう.
- ② 平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ③ 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ④ 物体が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周波数と周期を求めよう.

安定な平衡点の近くでの微小振動

簡単のため $m = 1$ とする. 例として,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^2 - 6x + 8$$

の安定な平衡点 $x = 2$ の近くでの様子を考えよう.

$F(x) = x^2 - 6x + 8$ を平衡点 $x = 2$ においてテイラー展開



近くの運動なら, ($|x - x_0|$ が小さければ), 2次以上を無視していいかも.

単振動で近似できる. 周波数 $\omega = \sqrt{2}$.

微小振動

$mx'' = F(x)$ に従って運動するとき, 安定な平衡点 $x = x_0$ の近くの運動は, 単振動 $mx'' = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$ で近似できる.

Quiz(微小振動の周期を求めよう!)

質量 $m = 3$ の物体の、時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では、力 $F(x) = \sqrt{3} - 2 \cos x$ がはたらく. 物体の $-\pi < x < +\pi$ の範囲の運動を考える.

- ① 運動方程式を書こう.
- ② 平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ③ 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ④ 物体が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周波数と周期を求めよう.

Quiz(微小振動の周期を求めよう!)

質量 $m = 1$ の質点の時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x) = e^{-6x} - e^{-2x}$ を受けて運動している.

- ① 運動方程式を書こう.
- ② 平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ③ 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ④ 質点が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周期を求めよう.

数理モデル II のりの平衡点と安定性と '同じ'

$x'' = F(x)$ の微小振動を数理モデル II のりで考えよう. 新しい変数 $y = x'$ をいれて 1 階落とす.

$$x' = f_1(x, y) = y$$

$$y' = f_2(x, y) = F(x)$$

(x_0, y_0) が平衡点

$$\Leftrightarrow f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0, F(x_0) = 0$$

(x_0, y_0) は中心 or 節点 or 鞍点, 安定 or 不安定?

$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$. $f_i(x, y)$ を $(x, y) = (x_0, y_0)$ において (2 変数) 1 次のテイラー展開.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x_0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

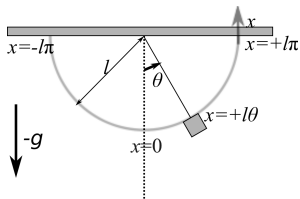
行列の固有値 $\lambda = \sqrt{F'(x_0)}$?

中心 $\Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$ が虚数 $\Leftrightarrow F'(x_0) < 0 \Leftrightarrow$ (今日の意味で) 安定

微小振動の例:振り子

運動方程式. 角度 $\theta(t)$ ($0 \leq \theta(t) < 2\pi$)

$$m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -mgl \sin \theta(t)$$



導出 1

回転の運動方程式 $\frac{dL}{dt} = N$.

角運動量 $L_z = (m\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z = ml(\ell\theta)' \times \sin \frac{\pi}{2}$.

力のモーメント $N_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z = -mg \times \ell \times \sin \theta$.

力学

導出 2

ふつうの運動方程式 $m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = F(x(t))$.

物理数学 II

$$x = \boxed{}$$

$$F_x = \boxed{}$$

平衡点と、そのまわりの微小振動の周波数を求める.

振り子の‘公式’

振り子の周波数

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad T = \dots$$

g :重力加速度の大きさ, ℓ ひもの長さ.

いまなら, 暗記すべき公式じゃなくって, 微小振動の周波数として導けるでしょ.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 §1.4(p.12-14)

- ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14)

次回の予習ポイント

- 2 物体系の運動方程式
- 2×2 行列の行列式
- 2×2 行列の固有値固有ベクトル

力学

線形代数

線形代数

予定 2012-10-23 火 3 休講させていただきます。たぶん期末試験前に補講します。

今週はスペシャルな予習復習問題!

今週の予習復習問題はのりが違います!

- 3 ピーナッツ
- 今日の quiz の記名答案をシャッフルして e ラーニングシステムからダウンロードできるようにする (水曜昼以降) ので, それを赤ペンで添削してください.
- 略解はない状態でやってもらいます
- 添削後の答案をスキャンして PDF にして, e ラーニングシステムに, 2012-10-24 水 23:59 までにアップロードしてください.
- スキャンのしかた <http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php>
- 添削者の名前は書かないでください. 解答者には伝えません. 樋口のみ伝わります.
- 2012-10-31 水まで, 普通の予習復習問題 (e ラーニングシステムの小テスト) はありません.

予習復習問題の趣旨と評価ポイント

- 樋口が添削をさぼりたい。
- 教員志望の人も多いんだから、'レポートの添削' を体験しよう!
- もちろん、図書館やネットをサーチして似た問題の解答を発見して、答案はさわらないでその後ろに赤ペンで丸写しすることもできるわけだけど、それって解答者にはあまり参考にならないでしょ。ここでは、解答の間違い方に応じて、適切な訂正とアドバイスを与えることを目的とします。
- 途中で終わっちゃってる答案に対しては、最後のゴールまで書いてあげる必要はありません。そこまでの誤りを指摘し、その次にどちら方向に行けばいいかをアドバイスしてあげましょう。
- もとの答案を解答者の quiz として、添削を添削者の予習復習問題として
 - ▶ 間違いを見逃してない
 - ▶ 正しい訂正をしている
 - ▶ 教育的に親切という観点から評価します。