

# 固有周波数と固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

現象の数学 B L06(2012-11-06 Tue)

## 今日の目標

- 1 連成振動の微分方程式を、固有モードの方法で解ける

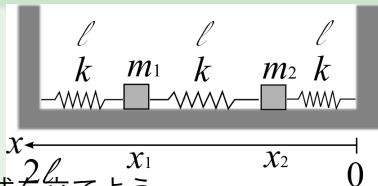
再履修の人に注意: 今年度は基準座標は後回し, または省略します.  $\theta_1$  と書いていたものが  $\theta^{(1)}$  になります.



<http://hig3.net>

## Quiz(連成振動の運動方程式)

図のように、物体とばねを配置する。  
ばね3個(自然長の合計 $3\ell$ )を間隔 $2\ell$   
の壁の間に押し込めていることに注意。



- ① 物体の位置  $x_1, x_2$  について運動方程式を立てよう。
- ② 平衡点からの変位  $u_1, u_2$  について運動方程式を立てよう。

## Quiz 解答:連成振動の運動方程式

①

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= k(2\ell - x_1 - \ell) - k(x_1 - x_2 - \ell), \\ m_2 x_2'' &= \qquad \qquad \qquad + k(x_1 - x_2 - \ell) - k(x_2 - \ell). \end{aligned}$$

- ②  $k(2\ell - x_1 - \ell) - k(x_1 - x_2 - \ell) = +k(x_1 - x_2 - \ell) - k(x_2 - \ell) = 0$   
 を解いて平衡点を求めると,  $(x_1, x_2) = (\frac{4}{3}\ell, \frac{2}{3}\ell)$ .

$u_1 = x_1 - \frac{4}{3}\ell, u_2 = x_2 - \frac{2}{3}\ell$  において,  $u_1, u_2$  について運動方程式を書き直すと,

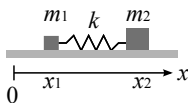
$$\begin{aligned} m_1 u_1'' &= -ku_1 - k(u_1 - u_2), \\ m_2 u_2'' &= \qquad \qquad \qquad + k(u_1 - u_2) - ku_2. \end{aligned}$$

平衡点からの変位  $u_1, u_2$  で書いた運動方程式は斉次になることをあらかじめ知っているので, この運動方程式を  $(x_1, x_2$  についてのものを書かずに) いきなり書くこともできる.

## 重心座標と相対座標

$$m_1 x_1'' = -k(x_1 - x_2)$$

$$m_2 x_2'' = +k(x_1 - x_2)$$



## 力学の教訓

重心座標  $X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ , 相対座標  $x = x_2 - x_1$  で考えるとうまくいく!

- $X$  だけの運動方程式,  $x$  だけの運動方程式になる (運動方程式が分離される)
- $X$  は等速直線運動 (  )
- $x$  は単振動

## 特別に簡単な場合は力学で何とかなる

$$mu_1'' = -ku_1 + K(u_2 - u_1) \quad (1)$$

$$mu_2'' = -K(u_2 - u_1) - ku_2 \quad (2)$$

(1) + (2), (1) - (2) を作ってみよう.

$$m(u_1 + u_2)'' = -k(u_1 + u_2)$$

$$m(u_1 - u_2)'' = -(k + 2K)(u_1 - u_2)$$

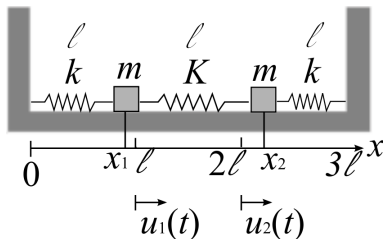


と置く.

$$mU_1'' = -kU_1$$

$$mU_2'' = -(k + 2K)U_2$$

‘(連立) 運動方程式は  $U_1, U_2$  に分離された’ という. この結果,  $U_1, U_2$  の解はそれぞれ単振動.



$mU_1'' = -kU_1$  を解いて

$$U_1(t) = A_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta_1 \right).$$

$mU_2'' = -(k + 2K)U_2$  を解いて

$$U_2(t) = A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta_2 \right).$$

ここで、任意定数  $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$  は一般には  $A_1 \neq A_2, \theta_1 \neq \theta_2$  であることに注意.

$U_1, U_2$  を  $u_1, u_2$  について逆に解くと、



よって、

$$u_1(t) = \frac{1}{2} A_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta_1 \right) + \frac{1}{2} A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta_2 \right)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} A_1 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta_1 \right) - \frac{1}{2} A_2 \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta_2 \right)$$

任意定数を rename して

$$u_1(t) = C^{(1)} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta^{(1)} \right) + C^{(2)} \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta^{(2)} \right)$$

$$u_2(t) = C^{(1)} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta^{(1)} \right) - C^{(2)} \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta^{(2)} \right)$$

大注意

$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}, \theta^{(4)}$  としてはいけない。

$C^{(1)} = C^{(2)}, \theta^{(1)} = \theta^{(2)}$  としてもいけない。

だって初期条件は2個の物体

の  = 自由度の数ほど変数の置き方をしても変わらない。

ベクトルで書く  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  と書くと、

$$\mathbf{u}(t) = C^{(1)} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t - \theta^{(1)} \right) + C^{(2)} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \left( \sqrt{\frac{k+2K}{m}} t - \theta^{(2)} \right)$$

## 簡単じゃなくて力学じゃなんとかならない場合

## Quiz(連成振動)

連成振動の運動方程式

$$u_1'' = -5u_1 + 8u_2$$

$$u_2'' = +2u_1 - 5u_2$$

を解こう。

$$\mathbf{u}'' = -K\mathbf{u}$$

と書こう。  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ,  $K$  は  $2 \times 2$  行列 .なぜ  $-K$ ?



## 固有周波数と固有モード

例から,

$$\mathbf{u}''(t) = -K\mathbf{u}(t),$$

という方程式には,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t, \theta) = \mathbf{a} \cos(\omega t - \theta)$$

というタイプの解がありそう.  $\theta$  は任意.  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\omega > 0$  は何か決まった数.

この解  $\mathbf{g}(t, \theta)$  (固有モードという) を求めよう.

$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t - \theta)$  を運動方程式に代入 ( $\mathbf{a}, \omega$  は文字のままにしておくけど後で決める).

$$\begin{aligned}\mathbf{u}''(t) &= -K\mathbf{u}(t) \\ -\omega^2 \mathbf{a} \cos(\omega t - \theta) &= -K\mathbf{a} \cos(\omega t - \theta)\end{aligned}$$

$$-\omega^2 \mathbf{a} = -K \mathbf{a}$$

$\omega$  と  $\mathbf{a}$  を決めたかったんだけど、

$\omega^2$  は

$\mathbf{a}$  は

とわかった。

いま  $K$  は、 $2 \times 2$  行列だから固有値、固有ベクトルは2つずつ

$$\lambda^{(1)} = 1, \lambda^{(2)} = 9, \quad \mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2つの固有モード  $\mathbf{g}^{(1)}(t, \theta^{(1)})$ ,  $\mathbf{g}^{(2)}(t, \theta^{(2)})$  がある。

$$\mathbf{g}^{(1)}(t, \theta^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{1} t - \theta^{(1)}), \quad \mathbf{g}^{(2)}(t, \theta^{(2)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{9} t - \theta^{(2)})$$

線形微分方程式だから線形結合も解。一般解はその線形結合。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= C^{(1)} \mathbf{g}^{(1)}(t, \theta^{(1)}) + C^{(2)} \mathbf{g}^{(2)}(t, \theta^{(2)}) \\ &= C^{(1)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta^{(1)}) + C^{(2)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(3t - \theta^{(2)}) \end{aligned}$$

$C^{(1)}, C^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}$  は任意定数。

## ちよつとまとめ

一般に次の微分方程式を考える.

$$\mathbf{u}''(t) = -K\mathbf{u}(t) \quad K \text{ は } 2 \times 2 \text{ 行列}$$

物体 2 個の場合の固有モードによる一般解

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\ell=1}^2 C^{(\ell)} \mathbf{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)}).$$

- 固有モード  $\mathbf{g}^{(\ell)}(t, \theta_{\ell}) = \mathbf{a}^{(\ell)} \cos(\omega^{(\ell)}t - \theta^{(\ell)})$
- 固有周波数  $\omega^{(\ell)}$  ( $\lambda^{(\ell)} = (\omega^{(\ell)})^2$  が  $K$  の固有値)
- $\mathbf{a}^{(\ell)}$ :  $K$  の固有ベクトル.
- $C^{(\ell)}, \theta^{(\ell)}$  は任意定数.

固有周波数, 固有モードは,  と同じ数だけ (いまは 2 個) ある.

## 4つの独立な解, という言い方

加法定理を使うと,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} (\cos(\omega^{(1)}t) \cos \theta^{(1)} + \sin(\omega^{(1)}t) \sin \theta^{(1)}) \\ &\quad + C^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} (\cos(\omega^{(2)}t) \cos \theta^{(2)} + \sin(\omega^{(2)}t) \sin \theta^{(2)}) \\ &= A^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} \cos(\omega^{(1)}t) + B^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} \sin(\omega^{(1)}t) \\ &\quad + A^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} \cos(\omega^{(2)}t) + B^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} \sin(\omega^{(2)}t). \end{aligned}$$

という4つの独立な解の線形結合とも思える. 2変数, 2階だから4個の任意定数.

これ物理数学II, 数理モデル基礎Iでやってたのの進化バージョン  
よく,  $x(t) = e^{\lambda t}$  とおいてみて  $\lambda$  を決める, ってやってたでしょ.  
今の場合,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t - \theta) = \mathbf{a} \frac{e^{i\omega t - i\theta} + e^{-(i\omega t - i\theta)}}{2} = \mathbf{u}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}).$$

- $\lambda$  と  $\omega$  は  $i = \sqrt{-1}$  倍違うだけ. (この  $\lambda$  は行列の固有値じゃない)
- 以前は定数倍は気にしてなかったけど, 今回は  $\mathbf{a}$  も決める.

## 固有周波数, 固有モードを經由した連成振動の解き方

- ①  $K$  の固有値  $\lambda = \omega^2$ , 固有ベクトル  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  を求める (各 2 個ある).
- ② 固有周波数  $\omega$ , 固有モード  $\mathbf{g}(t, \theta) = \mathbf{a} \cos(\omega t - \theta)$  を作る (各 2 個ある  $\rightsquigarrow \ell = 1, 2$ )
- ③ 2 個の固有モードの線形結合

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\ell=1}^2 C^{(\ell)} \mathbf{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$$

が一般解.

- ④ 初期条件から,  $C^{(\ell)}, \theta^{(\ell)}$  を決める.

**注意** これまでは, 座標といったら  $x$ , 変位といったら  $u$ , という記法をとっていたが, それはこの授業のローカルルール. 以下では, 問題文の説明を読んでその問題の記法に従おう.

## Quiz(連成振動の固有周波数, 固有モード)

連成振動を表す  $x_1, x_2$  についての微分方程式系

$$x_1'' = -2x_1 + 2x_2$$

$$x_2'' = -x_1 - 5x_2$$

の固有周波数, 固有モードを, さらに一般解を求めよう.

## Quiz(連成振動の固有モードを用いた解法)

連成振動の運動方程式

$$x_1'' = -3x_1 - 2x_2$$

$$x_2'' = -2x_1 - 3x_2$$

の固有周波数と固有モードを求めて, 初期条件

$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1'(0) = x_2'(0) = 3$  のもとで解こう.

## 連絡

### 今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.23-32

- ばねの連成振動 小形 2 章演習問題 [1](p.38)
- ばねの連成振動 小形 2 章演習問題 [2](p.38)
- 二重振り子の連成振動 小形 2 章演習問題 [10](p.39)
- LC 回路の連成振動 小形 2 章演習問題 [11](p.14)

### 次回の予習ポイント

- $3 \times 3$  行列の行列式, 固有値, 固有ベクトル

**予習復習問題** 水から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね～  
添削作戦にリベンジ追加 3 ピーナッツ. 期限 2012-11-12 月夜. リメディ  
アル物理学の中の演習 (e ラーニングシステムから). いまなら公式暗記  
じゃなく解けるはず.

# プチテストやります!

**日時** 2012-11-20 火 3, 90 分.

**場所** いつもと同じ

**配点** 100 点 30 ピーナッツ.

**参照** なし.

**公欠** 基準と届が独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する(しない)方法参照.

**出題計画** 未確定です. 2012-11-13 火の授業で修正+詳細化される予定です.

- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を立てよう
- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を解こう
- 式から単振動の正確なグラフを描き振幅, 周期, 周波数を答えよう
- ばねとは限らない力について, 安定, 不安定な平衡点を見つけよう
- 安定な平衡点の近くでの微小振動の周波数, 周期を求めよう
- 物体 2 個, ばね複数のときに運動方程式を立てよう
- 物体 2 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを求めて運動方程式を解こう
- ??(L07)
- ??(L07)
- ??(L07)