N 物体の固有周波数と固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L09(2012-12-04 Tue)

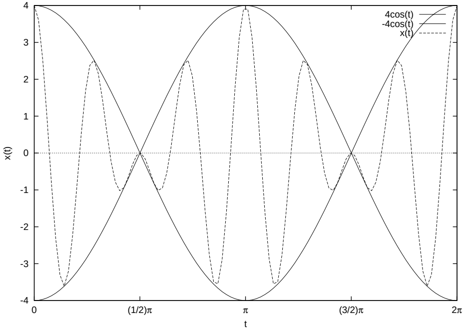
今日の目標

1. N 個の物体の連成振動の固有周波数と固有モードを公式から求められる
2. N 個の物体の連成振動の固有周波数の大小と固有モードの形の関係を説明できる

http://hig3.net

Quiz 解答:うなり

和積公式より $x(t) = 4\cos 7t \cos t$. 周期 2π の遅い振動 $\pm 4\cos t$ を上下限として, 周期 $\frac{2}{7}\pi$ の速い振動.



$\pm 4\cos t$ を描いた後で, $x(t)$ を描くときの注意. n を整数とする.

- $\cos 7t = 1$ となる $t = \frac{1}{7}(2n\pi)$ では $x(t)$ は $4\cos t$ に接する.

- $\cos 7t = -1$ となる $t = \frac{1}{7}(2n+1)\pi$ では $x(t)$ は $-4\cos t$ に接する. 特に $x(\pi) = +4$.
- $\cos 7t = 0$ となる $x = \frac{1}{7}(2n+\frac{1}{2})\pi, \frac{1}{7}(2n+\frac{3}{2})\pi$ では $x(t) = 0$ となる.
- $4\cos t = 0$ となる $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ でも $x(t) = 0$ となるが, これらの点は上に含まれ, 2 つの $\cos$ の両方が符号を変えるため, 積 $x(t)$ の符号は変わらない (負 $\to 0 \to$ 負). 2 次関数 $-(x-\frac{1}{2}\pi)^2$ のような形になる.

Quiz(連成振動の固有モード)

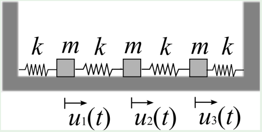
2 個の物体の連成振動の固有モードについて, 正しいものすべてを選ぼう

1. 固有モードを時間の関数と見ると, 三角関数で表せる
2. 固有モードを 2 次元ベクトルとしてみると, つねに同じ方向を向いている
3. 固有モードの周波数は時間とともにだんだん減少していく
4. 固有モードの振幅は時間とともに増加, 減少を繰り返す
5. 各固有モードは, それぞれ, ただ 1 つの固有周波数を持つ

固定端. 質量とばね定数はすべて同じ.

Quiz(3 物体の連成振動)

図のように 4 つのばね (ばね定数 $k=1$) で結ばれた質量 $m=1$ の 3 物体が, 一直線上で運動している. 時刻 t における位置 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ は, それぞれの質点の平衡点 (力のつりあいの位置) からはかった変位である.



1. u_1, u_2, u_3 について運動方程式をたてよう.
2. 固有周波数を求めよう.
3. 固有モードを求めよう.

Quiz 解答:3 物体の連成振動

1.
$$
\begin{aligned}
mu_1'' &= -ku_1 - k(u_1-u_2) \\
mu_2'' &= \qquad +k(u_1-u_2) - k(u_2-u_3) \\
mu_3'' &= \qquad\qquad +k(u_2-u_3) - ku_3
\end{aligned}
$$
$m=1, k=1$ より
$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
$$
2. K の固有値は, $0=\det(\lambda E-K)=$
$(\lambda-2)((\lambda-2)^2-1)-1(1(\lambda-2))=(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)$ より,
$\lambda=2, 2\pm\sqrt{2}$. よって, 固有周波数
$\omega=\sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}>0.$
3. これらの λ に対応する固有ベクトルは, $(\lambda E-K)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を解いて,
$$
\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}
$$
固有モードはそれぞれ

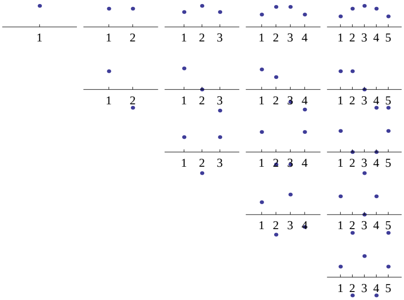
$N=4$ 物体のとき

$$
\begin{aligned}
mu_1'' &= -ku_1 - k(u_1-u_2) \\
mu_2'' &= \qquad\quad +k(u_1-u_2) - k(u_2-u_3) \\
mu_3'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad +k(u_2-u_3) - k(u_3-u_4) \\
mu_4'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +k(u_3-u_4) - ku_4
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{u}''(t) = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t).
$$

$N = 2, 3, 4, 5, \ldots$ 物体の場合の連成振動の固有周波数, 固有モード

$N \times N$ 行列が (~~かすく~~数値的でもいいから) 対角化できれば答えは求まる.
左から, 物体数 $N = 1, 2, 3, 4, 5$. 縦方向固有モードの種類.



N 物体の連成振動の運動方程式

$$\boldsymbol{u}''(t) = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +2 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & +2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{u}(t)$$

ふつうの (今までの) 作戦

$N \times N$ 行列式を計算 $\rightsquigarrow$ N 次方程式を解く $\rightsquigarrow$ K の固有値 λ を求める $\rightsquigarrow$ K の固有ベクトル $\boldsymbol{a}$ を求める.

今回の作戦

$\boxed{}$ (N 個も?)

$\rightsquigarrow$ $\boxed{}$

霊感+観察 $\rightsquigarrow$ 固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sin(1p) \\ \sin(2p) \\ \vdots \\ \sin(Np) \end{pmatrix}$$

なんてどう? p は後から決める作戦.

$$K\boldsymbol{a} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +2 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & +2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(1p) \\ \sin(2p) \\ \vdots \\ \sin(Np) \end{pmatrix}$$

の $2 \leq n \leq N-1$ 行目を計算すると,

霊感的中! 固有値 $2(1-\cos(p))\frac{k}{m}$ の固有ベクトル!?

- $n=1,N$ が不安.
- p って任意? 固有ベクトルは N 個しかないはずなんだけど.

1 行目

$$
\begin{aligned}
&K\boldsymbol{a} \text{ の 1 行目} \\
&\quad = \frac{k}{m}[2\sin(1p) - 1\sin(2p)] \\
&\quad = \frac{k}{m}[2\sin(p) - 2\sin(p)\cos(p)] \\
&\quad = (2-\cos(p))\frac{k}{m}\sin(p)
\end{aligned}
$$

OK.

N 行目

$$
\begin{aligned}
K\boldsymbol{a} \text{ の } N \text{ 行目 } &= \frac{k}{m}[-\sin((N-1)p) + 2\sin Np] \\
&= \frac{k}{m}[-(\sin(Np)\cos(p) - \cos(Np)\sin(p)) + 2\sin(Np)]
\end{aligned}
$$

これが $\frac{k}{m}[(2-2\cos(p))\sin(Np)]$ になってくれないと困る. 差を考えて,

$$
-\sin(Np)\cos(p) - \cos(Np)\sin(p) = -\sin((N+1)p)
$$

が 0 になってくれないと困る.

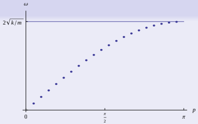
$$
(N+1)p = \ell\pi \quad (\ell = 1, \ldots, N).
$$

$\ell \leq 0, \ell \geq N+1$ もあるけど, 無意味 or 重複. ここで, p は物体番号 n を変化させたときの空間的な波の振動の速さを表すので, $\boxed{}$ という. $(n = 1, \ldots, N)$

$\boxed{}$ 自然長廃止.

波数を $p^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N+1}$, $\ell = 1, \ldots, N$ と書く.

固有周波数は, $\omega^{(\ell)} = \sqrt{\frac{k}{m}(2 - 2\cos(p^{(\ell)}))} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p^{(\ell)})$



上の式のような
ω と p の関係のこと. ある固有モードを決めたとき

- 固有周波数 ω : 時刻 t が変化したときに $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$ がどのくらいの速さで振動するかを表す
- (固有ベクトル $\sim$) 波数 p: 物体番号 n が変化したときに $g_n^{(\ell)} \sim a_n^{(\ell)}$ がどのくらいの速さで振動するかを表す

$$\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)}) = \begin{pmatrix} g_1^{(\ell)}(t,\theta^{(\ell)}) \\ \cdots \\ g_n^{(\ell)}(t,\theta^{(\ell)}) \\ \cdots \\ g_N^{(\ell)}(t,\theta^{(\ell)}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^{(\ell)}\cos(\omega^{(\ell)}t - \theta^{(\ell)}) = \begin{pmatrix} a_1^{(\ell)} \\ \cdots \\ a_n^{(\ell)} \\ \cdots \\ a_N^{(\ell)} \end{pmatrix}\cos(\omega^{(\ell)}t - \theta^{(\ell)})$$

N 物体の固定端の連成振動のまとめ

以下, 固有モード番号 ℓ をひとつ固定する.

- 物体番号 $n = (0,)1, 2, \ldots, N(, N+1)$.
- **固有周波数** $\omega^{(\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2} \frac{\ell\pi}{N+1})$.
- 固有モード (の関数形)

$$g_n^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)}) = a_n \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}) = \sin(np^{(\ell)}) \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}).$$

- ここでベクトル $\boldsymbol{a}$ の形は**波数** $p^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N+1}$ で決まってる.
- ω と p の関係 (**分散関係**) $\omega^{(\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2} p^{(\ell)})$

固定端の N 物体の連成振動の一般解

一般解は全ての固有モード $\ell = 1, 2, \ldots, N$ の線形結合で

$$
\begin{aligned}
u_n(t) &= \sum_{\ell=1}^{N} C^{(\ell)} g_n^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} C^{(\ell)} a_n^{(\ell)} \cos\left(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{N} C^{(\ell)} \sin(\tfrac{n\ell\pi}{N+1}) \cos\left(\left[2\sqrt{\tfrac{k}{m}} \sin(\tfrac{\ell\pi}{2(N+1)})\right] \cdot t - \theta^{(\ell)}\right).
\end{aligned}
$$

Quiz(物体番号モード番号の意味)

その文字 (変数) はどれ?

1. モード番号
2. 物体番号
3. ばね番号
4. ページ番号
5. ペンギン番号
6. モードの個数
7. 物体の個数
8. ばねの個数
9. ページの枚数
10. ペンギンの羽数

Quiz(N 物体の連成振動の固有モード)

モードについて次のうち正しくないのはどれ?

1. 波数が大きいほど固有周波数は大きい
2. 波数が小さいほど固有周波数は大きい
3. 波数は変位の時間的変化の速さを表す
4. 固有周波数は変位の時間的変化の速さを表す
5. 分散関係とは波数と固有周波数の関係である
6. 分散関係とは固有値と固有周波数の関係である

Quiz(固定端の連成振動)

1. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N=2$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数, 固有モード (のベクトル) をすべて求め, 一般解を書こう.
2. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N=3$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数, 固有モード (のベクトル) をすべて求め, , 一般解を書こう. 見慣れない $\sin, \cos$ の値も, 半角公式を使って求められるはず.
3. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N=5$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数をすべて求めよう. $\ell=4$ 固有モード (のベクトル) を求めよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 p.47-57

- 分散関係 小形 例題 3.2(p.55)
- N 質点の連成振動の固有モード 小形 3 章演習問題 [3](p.57),[5](p.58)

次回の予習ポイント

- 偏微分 (微積分・演習)
- 偏微分方程式 (現象の数学 A)

予習復習問題

水から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね〜