波動方程式の導出

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L10(2012-12-11 Tue)

今日の目標

1. N 個の物体の連成振動の固有周波数と固有モードを公式から求められる
2. 波動方程式の意味を説明できる
3. 2 変数関数が波動方程式の解になっているか判定できる

http://hig3.net

Quiz 略解

すみません. 固有周波数 ω と固有振動数 f の関係は　$\omega = 2\pi f$ なので, 大小はどちらで語っても同じです.

2,3,6.

N 物体の固定端の連成振動のまとめ

固有モード ℓ を考える ($\ell = 1, 2, \ldots, N$)

- 物体番号 $n = 1, 2, \ldots, N$.
- **波数** $p^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N+1}$. これが固有ベクトルの形を決めてる.
- **固有周波数** $\omega^{(\ell)}$
- 固有モード (の関数形)

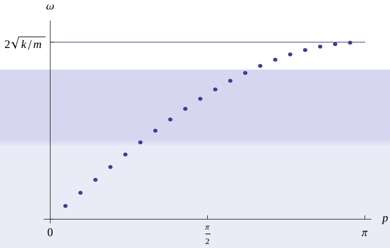
$$g_n^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)}) = a_n^{(\ell)} \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}) = \sin(np^{(\ell)}) \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}).$$

$$\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)}) = \boldsymbol{a}^{(\ell)} \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}) = \begin{pmatrix} \sin(1p^{(\ell)}) \\ \sin(2p^{(\ell)}) \\ \cdots \\ \sin(np^{(\ell)}) \\ \cdots \\ \sin(Np^{(\ell)}) \end{pmatrix} \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}).$$

- ω と p の関係 $\omega^{(\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2} p^{(\ell)})$

波数 $p^{(\ell)} = \frac{\ell\pi}{N+1}$, $\ell = 1, \dots, N$

固有周波数 $\omega^{(\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2}p^{(\ell)})$.



上の式のような ω と p の関係のこと．ある固有モードを決めたとき

固有周波数 ω : 時刻 t が変化したときに $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$ がどのくらいの速さで振動するかを表す

波数 p ($\sim$ 固有ベクトル): 物体番号 n が変化したときに $g_n^{(\ell)} \sim a_n^{(\ell)}$ がどのくらいの速さで振動するかを表す

固定端の N 物体の連成振動の一般解

一般解は全ての固有モード $\ell = 1, 2, \ldots, N$ の線形結合で

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C^{(\ell)} \boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$$

$\cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)})$.

$$u_n(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C^{(\ell)} g_n^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$$

$$= \sum_{\ell=1}^{N} C^{(\ell)} \sin(\tfrac{n\ell\pi}{N+1}) \cos\left(\left[2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\tfrac{\ell\pi}{2(N+1)}) \right] \cdot t - \theta^{(\ell)} \right).$$

Quiz(固定端の連成振動)

物体の質量 m, ばね定数 k の, 固定端の連成振動を考える.

1. 物体の個数 $N=2$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数, 固有モード (のベクトル) をすべて求め, 一般解を書こう.
2. 物体の個数 $N=3$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数, 固有モード (のベクトル) をすべて求め, , 一般解を書こう. 見慣れない $\sin, \cos$ の値も, 半角公式を使って求められるはず.
3. 物体の個数 $N=5$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数をすべて求めよう. $\ell=4$ 固有モード (のベクトル) を求めよう.

波動方程式の導出

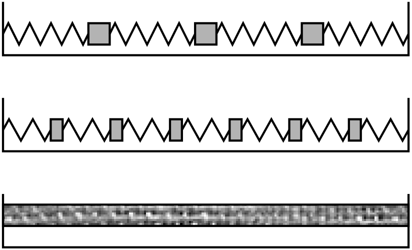
小形 §4.4

N 物体の固定端の連成振動.
物体番号 $n = 1, 2, \ldots, N$ の運動方程式

$$mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_n)$$

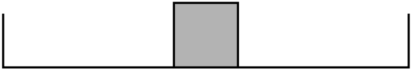
ここで $N \to +\infty$ としたい.
ただし, 全質量 M, 全ばね定数 K 全長 L は一定のままにしたい

そんな極限?



換算その 1: 物体の質量

全質量 M

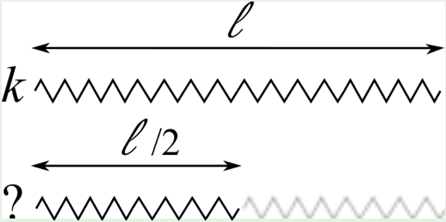


N 物体のとき, 1 個あたり $m = \boxed{}$.

$N \to +\infty$ で $m \to 0$.

Quiz(2 本に切ったばねのばね定数)

自然長 ℓ, ばね定数 k のばねを真ん中から 2 つに切ると, 自然長は $\ell/2$, ばね定数は?



1. k^2
2. $2k$
3. k
4. $k/2$
5. $1/\sqrt{k}$

換算その 2: ばね

‘全ばね定数’ K, 全ばね長 L.

ばね長さ (ばねの自然長)

$N=1$ 物体のとき, ばね $1+1$ 本. 1 本あたりのばね長 $L/2$

N 物体のとき, ばね $N+1$ 本. 1 本あたりのばね長 $\ell = L/(N+1)$

$N \to +\infty$ で $L \to 0$.

ばね定数

$N=1$ 物体のとき, ばね $1+1$ 本. 1 本あたり $k = \boxed{\quad\quad}$

N 物体のとき, ばね $N+1$ 本. 1 本あたり $k = \boxed{\quad\quad\quad\quad}$

$N \to +\infty$ で $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

換算その 3: 物体番号 $\rightarrow$ 長さ

変数 (変位) u_n の今までののり:

- 物体 N 個 $u_1, u_2, \ldots, u_N$
- 物体 $2N$ 個 $u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots, u_{N+1}, \ldots, u_{2N}$

同じ u_N でも意味が全然違う! $\boxed{}$

$N \rightarrow +\infty$ でみんな u_∞!

解決策物体番号 n のかわりに端を原点とする座標 x を使う $(0 \leq x \leq L)$

- 物体 N 個 $u_1 = u_{x=\frac{L}{N+1}}, \ldots, u_{N/2} = u_{x=\frac{L}{2}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{N}{N+1}L}$
- 物体 $2N$ 個 $u_1 = u_{x=\frac{L}{2N+1}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{L}{2}}, \ldots, u_{2N} = u_{x=\frac{2N}{2N+1}L}$

物体 $N \rightarrow +\infty$ でも真ん中は $u_{x=\frac{L}{2}}$. 記法: $u_n(t) \rightarrow u_x(t) \rightarrow \boxed{}$

換算 4: $u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}$

復習:微分の差分近似

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a) - f(a-\Delta x)}{\Delta x} \qquad \text{(どっちでも同じこと)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} - \frac{f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - 2f(a) + f(a-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$\rightsquigarrow$ 予習問題.

運動方程式 $mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_n)$ で,
さっきのように, $u_n(t) = u(x,t)$ とする.
$u(x+\ell,\dot{)} \to f(a+\Delta x)$ のように思う.

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}/k =& u_{n-1}(t) - 2u_n(t) - u_{n+1}(t) \\
=& u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t) \\
=& \ell^2 \cdot \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x-\ell,t)}{\ell^2} \\
\to& \ell^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)
\end{aligned}
$$

さいごの行では, 極限 $N \to +\infty$, $\ell \to 0$.

4 個の換算をまとめると

物体番号 n の運動方程式

$$mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_n)$$

全質量全ばね定数全長固定で物体の個数 $N \to +\infty$. N 物体のとき

$$\frac{M}{N}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = (K(N+1))(\ell)^2 \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$\ell = \Delta x = L/(N+1) \to 0$, $\frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \to KL/(M/L) = v^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

ここで, $v^2 = KL/\rho$. 速さの次元を持つ定数.
$\rho = m/L$ は線質量密度 (単位長さあたりの質量), KL は, う〜ん, Young 率と太さに関係した, ばねの材質と断面積から決まる, 長さによらない量.

換算 5:物体 $n=1,N$ の隣は壁 $\to$ ひもの端は動かない (境界条件)

N 物体

物体 $n=1,N$ の隣は壁．運動方程式も特別.

$N \to \infty$

最初に壁の位置 $x=0,L$ にあったひも上のマークは動かない
$\leadsto$ 任意の t に対して $u(0,t)=u(L,t)=0$. 境界条件

別の考え方

壁の位置 (ひもの両端) にもう 1 個ずつ物体 u_0, u_{N+1} があって動かない, と思ってもいい.

$u_0(t)=0 \leadsto u(0,t)=0$
$u_{N+1}(t)=0 \leadsto u(L,t)=0$

換算 6:初期条件 $\to$ 初期条件

$N=2$ 物体

$u_1(0)=2, u_2(0)=0, u_1'(0)=u_2'(0)=0.$

物体の初期位置と初期速度を決めると, 任意定数 C_i, θ_i が決まって運動が定まった.

N 物体

$u_1(0)=(\cdots), u_2(0)=(\cdots), \cdots, u_N(0)=(\cdots).$

$u_1'(0)=(\cdots), u_2'(0)=(\cdots), \cdots, u_N'(0)=(\cdots).$

$N\to+\infty$

任意の x に対して $u(x,0)=F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,L)=G(x).$ 初期条件

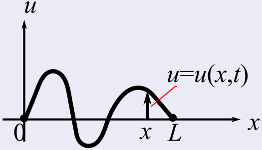
波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 弦上の位置 x での時刻 t における変位とする.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 \le x \le L)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数
固定端の $\boxed{\text{境界条件}}$ $u(0,t) = u(L,t) = 0$.



この他に $\boxed{\text{初期条件}}$ (位置と速度) $u(x,0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ を課すと解が決まる.

Quiz

Quiz(波動方程式)

長さ L のゴムひものののび $u(x,t)$ は $[0,L]$ で定義され, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (0 < x < L)$$

を満たす. 解 $u(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$ を考える. $v > 0$ は定数.

1. 時刻 $t = \frac{L}{2v}$ における変位の様子 (ゴムひもの形) を, 横軸 x 縦軸 u で描こう.
2. 点 $x = \frac{3}{4}L$ における変位の時間変化の様子を, 横軸 t 縦軸 u で描こう.
3. $\forall t \quad u(x,t) = 0$ を満たす点 x をすべて求めよう.
4. $u(x,t)$ が波動方程式を満たすことを確かめよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 N 物体のモード 小形 p.47-57
波動方程式 小形 p.60-64,p.80,p.81

- 分散関係 小形 例題 3.2(p.55)
- N 質点の連成振動の固有モード 小形 3 章演習問題 [3](p.57),[5](p.58)

次回の予習ポイント

- $y'' = -ay$ 型微分方程式.
- 偏微分方程式 (現象の数学 A)

予習復習問題
水から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね〜