波動方程式の固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L11(2012-12-18 Tue)

今日の目標

1. 波動方程式の初期条件と境界条件の意味を説明できる
2. 波動方程式の固有モードを求められる

http://hig3.net

Quiz 解答:固定端の連成振動

1. 波数 $p^{(1)} = \frac{1\pi}{2+1}, p^{(2)} = \frac{2\pi}{2+1}$.
固有周波数
$\omega^{(1)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p^{(1)} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega^{(2)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p^{(2)} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.
固有ベクトル
$\boldsymbol{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin 1p^{(1)} \\ \sin 2p^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \boldsymbol{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin 1p^{(2)} \\ \sin 2p^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$.
固有ベクトルは定数倍してもいいので，固有モード $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta^{(\ell)})$ は以前に求めたものと同じになる.
一般解は

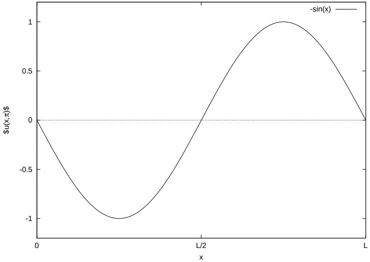
$$\boldsymbol{u}(t) = C^{(1)} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \theta^{(1)} \right) + C^{(2)} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\, t - \theta^{(2)} \right)$$

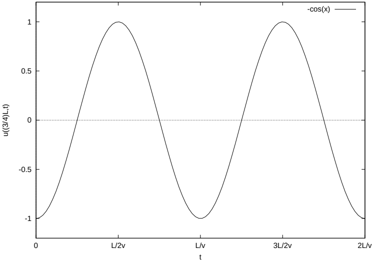
2. 波数 $p^{(1)} = \frac{1\pi}{3+1}, p^{(2)} = \frac{2\pi}{3+1}, p^{(2)} = \frac{3\pi}{3+1}$.
固有周波数 $\omega^{(1)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2}p^{(1)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{8}\pi = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}, \omega^{(2)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2}p^{(2)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \omega^{(3)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2}p^{(3)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$. ここでは半角公式を使って $\sin \frac{1}{8}\pi, \sin \frac{3}{8}\pi$ を求めた.
固有ベクトル $\boldsymbol{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin 1p^{(1)} \\ \sin 2p^{(1)} \\ \sin 3p^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin 1p^{(2)} \\ \sin 2p^{(2)} \\ \sin 3p^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sin 1p^{(3)} \\ \sin 2p^{(3)} \\ \sin 3p^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 \\ -\sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix}$.
固有ベクトルは定数倍してもいいので, 一般解は

$$\boldsymbol{u}(t) = C^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}\, t - \theta^{(1)}\right) + \text{あと 2 項}$$

Quiz 解答:波動方程式

1. $u(x, \frac{L}{2v}) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos\pi = -\sin(\frac{2\pi}{L}x)$
2. $u(\frac{3}{4}L, t) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{2\pi v}{L}t) = -\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.





3. $u(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t) = 0$ が任意の t に対して成立するためには, $\sin(\frac{2\pi}{L}x) = 0$ となる必要があり, また十分である. よって, $x = 0, \frac{1}{2}L, L$.
4. 左辺 $= -(\frac{2\pi v}{L})^2 \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.
   右辺 $= -(\frac{2\pi}{L})^2 v^2 \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.

波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 時刻 t での, 弦の位置 x における変位

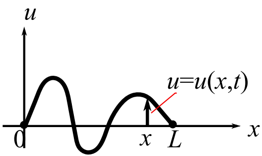
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数

波動方程式は $\boxed{}$ の一種

有限区間 $0 \le x \le L$ で考えるとき, $x = 0, L$ で $\boxed{}$ 条件を課すことが必要. 例: 固定端=固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

さらに $\boxed{}$ 条件 $u(x,0) = F(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$ を定めると解が 1 つに定まる. (F, G は任意定数じゃなくて任意関数)


u
u=u(x,t)
0
x
L
x

波動方程式で記述される世の中の現象

- 音波
- 弦, 弾性体の振動
- 光・電波 (電磁波)
- 地震波, 水面の波

いろんな偏微分方程式の出てくる科目

- 現象の数学 A(熱方程式=拡散方程式=放物型偏微分方程式)
- 現象の数学 B(波動方程式=双曲型偏微分方程式)
- 太鼓の形は音…(3 次元波動方程式 or 2 次元楕円型偏微分方程式)
- 計算科学 I(拡散方程式)
- 偏微分方程式 (一般の 1 階偏微分方程式)
- 理論物理 B(シュレーディンガー方程式)
- 電気・磁気 (マクスウェル方程式 $\rightarrow$ 電磁波の波動方程式)

$\leftrightarrow$ 常微分方程式 in 数理モデル基礎, 物理数学

換算 4: $u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}$

復習:微分の差分近似

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a) - f(a-\Delta x)}{\Delta x} \qquad \text{(どっちでも同じこと)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} - \frac{f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a-\Delta x) - 2f(a) + f(a+\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

$\rightsquigarrow$ 予習問題.

運動方程式 $mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})$ で,
さっきのように, $u_n(t) = u(x,t)$ とする.
$u(x+\ell,\cdot) \rightsquigarrow f(a+\Delta x), x \rightsquigarrow a, \ell \rightsquigarrow \Delta x$ のように思う.

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}/k =& u_{n-1}(t) - 2u_n(t) - u_{n+1}(t) \\
=& u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t) \\
=& \ell^2 \cdot \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x-\ell,t)}{\ell^2} \\
\to& \ell^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)
\end{aligned}
$$

さいごの行では, 極限 $N \to +\infty$, $\ell \to 0$.

4 個の換算をまとめると

物体番号 n の運動方程式

$$mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})$$

全質量全ばね定数全長固定で物体の個数 $N \to +\infty$. N 物体のとき

$$\frac{M}{N}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = (K(N+1))(\ell)^2 \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$\ell = \Delta x = L/(N+1) \to 0$, $\frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \to KL/(M/L) = v^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

ここで, $v^2 = KL/\rho$. 速さの次元を持つ定数.
$\rho = m/L$ は線質量密度 (単位長さあたりの質量), KL は, う〜ん, Young 率と太さに関係した, ばねの材質と断面積から決まる, 長さによらない量.

換算 5:物体 $n=1,N$ の隣は壁 $\to$ ひもの端は動かない (境界条件)

N 物体

物体 $n=1,N$ の隣は壁. 運動方程式も特別.

$N\to\infty$

最初に壁の位置 $x=0,L$ にあったひも上のマークは動かない
$\rightsquigarrow$ 任意の t に対して $u(0,t)=u(L,t)=0$. 境界条件

別の考え方

壁の位置 (ひもの両端) にもう 1 個ずつ物体 u_0,u_{N+1} があって動かない, と思ってもいい.

$u_0(t)=0 \rightsquigarrow u(0,t)=0$
$u_{N+1}(t)=0 \rightsquigarrow u(L,t)=0$

換算 6:初期条件 $\to$ 初期条件

$N=2$ 物体

$u_1(0)=2, u_2(0)=0, u_1'(0)=u_2'(0)=0.$

物体の初期位置と初期速度を決めると, 任意定数 $C^{(\ell)}, \theta^{(\ell)}$ が決まって運動が定まった.

N 物体

$u_1(0)=(\cdots), u_2(0)=(\cdots), \cdots, u_N(0)=(\cdots).$

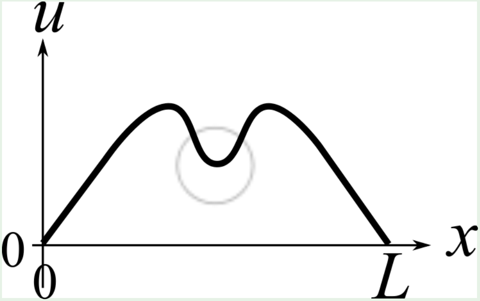
$u_1'(0)=(\cdots), u_2'(0)=(\cdots), \cdots, u_N'(0)=(\cdots).$

$N\to+\infty$

任意の x に対して $u(x,0)=F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,L)=G(x)$. 初期条件 F, G は任意の関数.

Quiz(波動方程式の時間発展)

この状態からそっと手を放すと，この部分はどう動く？



1. 上
2. しばらく動かない
3. 下
4. 爆発する

波動方程式の直観的意味

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$: 点 x が時刻 t に受ける力 (に比例)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$: 弦の形が上に凸または下に凸を表す

弦がまっすぐなところ

弦がでっぱってるところ

弦がへっこんでるところ

連成振動と波動の比較

	連成振動	波動
変位	$u_n(t)$	$u(x,t)$
時刻	t	t
位置	$n = 1, 2, \ldots, N$	$0 \leq x \leq L$

N 物体の固定端の連成振動では, ℓ 番目の固有モードは

$$g_n^{(\ell)}(t) = \sin(np^{(\ell)}) \times \cos(\omega^{(\ell)} t - \theta^{(\ell)}) = \boxed{}$$

だった.
波動方程式に対しても $u(x,t) = f(x)\cos(\omega t - \theta)$ みたいな解を探そう!

$$\text{(波)}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
$$\text{(境)}\quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を解こう. $u(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ とおいてみる.

$$\begin{aligned} \text{(波)} \rightsquigarrow -\omega^2 f(x)\cos(\omega t) =& v^2 f''(x)\cos(\omega t) \\ f''(x) =& -\left(\tfrac{\omega}{v}\right)^2 f(x) \end{aligned}$$

よって, $f(x) = \boxed{}$. A, ϕ は任意定数.

一方,

$$\text{(境)} \rightsquigarrow f(0)\cos(\omega t) = f(L)\cos(\omega t) = 0$$

よって, $\sin(-\phi) = 0$ かつ $\sin(\frac{\omega}{v}L - \phi) = 0$.
$\phi = 0$ かつ $\frac{\omega}{v}L = \pi\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$).

波動方程式の固有モード

固定境界条件の波動方程式の固有モード

$$g^{(\ell)}(x, t; \theta) = C \sin(px) \cos(\omega t - \theta)$$

- p:波数. $p = \frac{\ell\pi}{L}$. $\ell \in \mathbb{Z}$ はモード番号.
- ω: 固有周波数. $\boxed{}$ $\omega = pv$ で定まる.

比較:連成振動 と 波動

	連成振動	波動
波数 p の現れ方 p の値 ℓ の範囲	$\sin(pn)$ $\frac{\ell\pi}{N+1}$ $\ell = 1, 2, \ldots, N$	$\sin(px)$ $\frac{\ell\pi}{L}$ $\boxed{?}$
波数の単位 分散関係	無次元 (radian) $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2}p)$	radian/m $\omega = vp$

波動方程式の固有モードは何個ある?

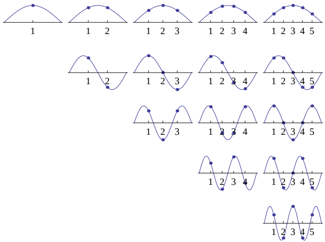
$\ell \in \mathbb{Z}$ っていうけど, 本当にぜんぶいるの?

$$\sin(px) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right)$$

役立たず: $\boxed{\qquad\qquad}$ $\sin(px) = 0$. ほしくない.

かぶってる: $\boxed{\qquad\qquad}$. $C\sin(-px) = (-C)\sin(px)$.

結局, 自然数すべて $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.



比較 連成振動では $\ell = 1, 2, \ldots, N$.

Quiz(波動方程式の固有モード)

固定境界条件の波動方程式の固有モードについて, 次のうち間違ってるのはどれ?

1. ω は p の三角関数で書ける
2. u は t の三角関数で書ける
3. 振動の (時間的) 周期が長いほど, 波数は大きい
4. 波数が大きいほど (時間的に) 速く振動する
5. 波数は固有周波数に比例する

Quiz(波動方程式の初期値問題)

関数 $u(x,t) = A\sin\frac{\pi}{L}x\cos(\frac{\pi v}{L}t-\theta)$ を考える．ここで, L, v は与えられた定数, A, θ は定めるべき未知定数である．
$u(\frac{1}{2}L, 0) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{1}{2}L, 0) = -\frac{\sqrt{3}\pi v}{L}$ を満たすように A, θ を定めよう．

Quiz(波動方程式の固有モード)

固定端の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

の, $u(x,t) = \sin(\frac{3\pi}{L}x)f(t)$ という形の解を考える,

1. $f(t)$ の満たす常微分方程式を求めよう.
2. 初期条件が $u(\frac{1}{2}L, 0) = \sqrt{3}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{1}{2}L, 0) = \frac{3\pi v}{L}$ であるとき, $f(0), f'(0)$ を求めよう.
3. 上の初期条件のもとで $f(t)$ を求めよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 §4.2(p.64-70)

- 固有周波数と波長 小形 例題 4.1(p.68)
- 自由端の固有周波数 小形 4 章演習問題 [4](p.81)

- 三角関数の積和公式
- フーリエ級数 (計算科学や現象の数学でやった人は)

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね～締切は来年の月曜夜.

 波動方程式の固有モード

携帯出席登録

方法 1

方法 2

手入力 `http://hig3.net` (→ 左上隅の ‘携帯’) → 生活の中の統計技術の携帯出席登録をする

アンケート 1: これで, これまでのような使い方のクリッカーを置きかえるとしたら?

1. 携帯のほうがよい
2. 携帯のほうがまだまし
3. どっちでも同じようなもの
4. クリッカーのほうがまだまし
5. クリッカーのほうがよい

アンケート 2:その理由?

- a 携帯は料金がかかるがクリッカーは料金がかからないから
- b 携帯のほうが入力が簡単だから
- c クリッカーのほうが入力が簡単だから
- d 携帯だと送信結果が簡単にわかるから
- e クリッカーだと送信結果が簡単にわかるから
- f 携帯を持っていないから
- g 携帯は充電してなかったり忘れたりすることがあるから
- h 携帯は電波がないことがあるから
- i クリッカーは配ったり集めたりするのが面倒だから
- j その他の理由 (書いてね)

アンケート 3:使っている携帯は?

- A (Android) スマートフォン
- B iPhone
- C その他の (従来型) 携帯, フィーチャーフォン
- D 携帯を使っていない

アンケート 4:定額制は?

- あ パケット定額制 (パケットし放題, ダブル定額, パケホーダイ) に加入している
- い パケット定額制に加入していないが, インターネットは使える
- う インターネットを使う契約をしていない