# 現象の数学Bプチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-11-17 Tue 更新: Time-stamp: "2009-11-29 Sun 14:30 JST hig"

### プチテスト参加案内

## 両面です．全部で5問です．80分です．

1. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

## 1

$x$ 軸上を運動する質量 $m=3$ の質点の時刻 $t$ の座標を $x(t)$ とする. 位置 $x$ では質点は力 $F(x)=x^3-5x^2+6x$ を受ける.

1. 運動方程式を書こう.
2. 平衡点をすべて見つけよう.
3. 安定な平衡点をすべて見つけよう.
4. 質点が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周期を求めよう.

## 2

$x(t), y(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x'' &= -2x+5y \\ y'' &= \tfrac{1}{5}x-2y \end{aligned}$$

の一般解を, 基準座標 $X=x+5y, Y=x-5y$ をとることによって求めよう.

## 3

連成振動を表す $x(t), y(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x'' &= -2x+2y \\ y'' &= -x-5y \end{aligned}$$

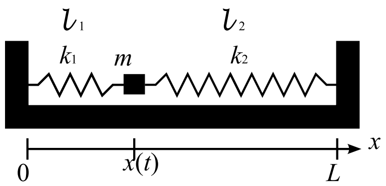
の固有振動数を求め, さらに一般解を求めよう.


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

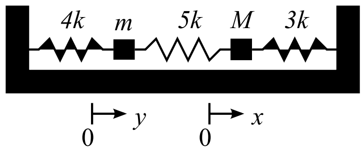
## 4

この問は完全な記述になってませんが，授業でやったのと同じような状況だと思ってやろう．また，運動方程式を書くだけでよく，解く必要はない．

1. 図のようにばねにつながれた物体の運動方程式を求めよう．ただし，$x$ は (変位ではなく) 一方の壁を原点とする座標で，物体の時刻 $t$ における位置を $x(t)$ とする．2 つのばねはそれぞれ，ばね定数 $k_1, k_2$，自然長 $l_1, l_2$ である．




2. 上で求めた運動方程式について，平衡点を求めよう．
3. 図のような連成振動子系の運動方程式を求めよう．ただし，$x(t), y(t)$ はつりあいの位置 (平衡点) を原点としてはかった，時刻 $t$ における変位である．
   <u>右側の点が $x$，左側の点が $y$ であることに注意．</u>




## 5

$x(t) = 2\cos 6t + 2\cos 8t$ のグラフを，三角関数の和積公式を利用して $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で描こう．$x$,$t$ 軸の目盛を忘れずに記そう．描くのに使った補助線を残そう．

## 6　アンケート

これは問題でなくアンケートです．

この問題を一通り解き終わるのに何分かかりましたか．解き終わらなかった人は，何分あれば一通り解き終わりそうですか．

また，自信のある問題，ない問題を答えてください．

授業，プチテストについて自由記述で答えるアンケートを e ラーニングサイトに設置しています．ご協力ください．

# 現象の数学 B プチテスト略解

**樋口さぶろお**[2] **配布**: 2009-11-17 Tue **更新**: Time-stamp: "2009-11-29 Sun 14:30 JST hig"

## 1

1. $3x'' = x^3 - 5x^2 + 6x$.
2. $F(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3) = 0$ を解いて, 平衡点は $x = 0, 2, 3$.
3. $F'(x) = 3x^2 - 10x + 6$. $F'(0) = 6, F'(2) = -2, F'(3) = 3$ より, 安定な平衡点は $x = 2$.
4. $x = 2$ において $F(x)$ をテイラー展開すると, $F(x) = 0 - 2(x-2) + \cdots$. 2 次以降の項を無視すると,

   $$3x'' = -2(x-2).$$

   $X = x - 2$ とおくと,

   $$3X'' = -2X.$$

   この一般解は $X(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t + \phi\right)$ ここで $A, \phi$ は任意定数. よって微小振動の周期は $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{6}\,\pi$.

### 配点

1–4 各 5 点. 計 20 点.

### 講評

最初のうちは $m = 3$ を考慮していたのに, 途中で $m = 1$ になってしまう答案がたくさんありました. ノートや記憶や過去問にあわせるのでなく, 自分のそこまでの答案との一貫性を大切にしよう. 自分が上で書いた式から, どういうロジックで次の式が出てくるかを気にしよう.

## 2

(上の式)$\pm 5$(下の式) により

$$X'' = -X,$$
$$Y'' = -3Y.$$


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

**よって解は**

$$
\begin{aligned}
X(t) =& A\cos(t+\phi_1),\\
Y(t) =& B\cos(\sqrt{3}\,t+\phi_2).
\end{aligned}
$$

$x=(X+Y)/2, y=(X-Y)/10$ **に注意すると**,

$$
\begin{aligned}
x(t) =& 5C_1\cos(t+\phi_1)+5C_2\cos(\sqrt{3}\,t+\phi_2),\\
y(t) =& C_1\cos(t+\phi_1)-C_2\cos(\sqrt{3}\,t+\phi_2).
\end{aligned}
$$

**ただし** $C_1, C_2, \phi_1, \phi_2$ **は任意定数**. **ここで**, $C_1=10A, C_2=10B$ **とおいた**.

**配点**

$X, Y$ **の微分方程式が導ける** 4 **点**, **固有振動数が求まる** 4 **点**. **固有モードが求まる** 4 **点**. $x, y$ **を** $X, Y$ **で書けている** 4 **点**. **一般解が書ける** 2 **点**. **任意定数の置き方などに一貫性がある** 2 **点**. **計** 20 **点**.

**講評**

**最初は** $x\pm 5y$ **を使ってたのに**, $x, y$ **を** $X, Y$ **で書こうとしたときに**, $x\pm y$ **になっちゃう答案がたくさんありました**. **ノートや記憶や過去問にあわせるのでなく**, **自分のそこまでの答案との一貫性を大切にしよう**. **自分が上で書いた式から**, **どういうロジックで次の式が出てくるかを気にしよう**.

## 3

$x(t)=A\cos(\omega t+\phi), y(t)=B\cos(\omega t+\phi)$ **を代入して整理すると**,

$$
\begin{aligned}
(-\omega^2A+2A-2B)\cos(\omega t+\phi) =& 0\\
(A-\omega^2B+5B)\cos(\omega t+\phi) =& 0.
\end{aligned}
$$

**これが任意の** $t$ **について成立するためには**,

$$
\begin{aligned}
(-\omega^2+2)A-2B =& 0,\\
A+(-\omega^2+5)B =& 0.
\end{aligned}
$$

**これを**, $A, B$ **に関する** 1 **次方程式と見なすと**, $(A,B)\neq(0,0)$ **である解が存在するためには**,

$$
\det\begin{pmatrix}(-\omega^2+2) & -2\\ 1 & (-\omega^2+5)\end{pmatrix}=0
$$

が必要である．これを解くと $\omega^2 = 3, 4$. 正のものだけをとって，固有振動数は $\omega = \sqrt{3}, 2$. それぞれに対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} C_1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_2. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

よって一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} C_1 \cos(\sqrt{3}\, t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_2 \cos(2t + \phi_2).$$

ここで $C_1, C_2, \phi_1, \phi_2$ は任意定数.

### 配点

行列の形が出せる 5 点．固有振動数が求まる 6 点．固有モードが求まる 4 点．一般解の形が書ける 5 点．計 20 点.

### 講評

最初は $x \pm 5y$ を使ってたのに，$x, y$ を $X, Y$ で書こうとしたときに，$x \pm y$ になっちゃう答案がたくさんありました．ノートや記憶や過去問にあわせるのでなく，自分のそこまでの答案との一貫性を大切にしよう．自分が上で書いた式から，どういうロジックで次の式が出てくるかを気にしよう.

## 4

1. 左右のばねののびはそれぞれ $(x - l_1), (L - x - l_2)$ なので，

$$mx'' = -k_1(x - l_1) + k_2(L - x - l_2).$$

2. 右辺 $= 0$ を $x$ について解いて，$x = \frac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$.
3. 

$$\begin{aligned} Mx'' &= -3kx - 5k(x - y) \\ my'' &= +5k(x - y) - 4ky \end{aligned}$$

### 配点

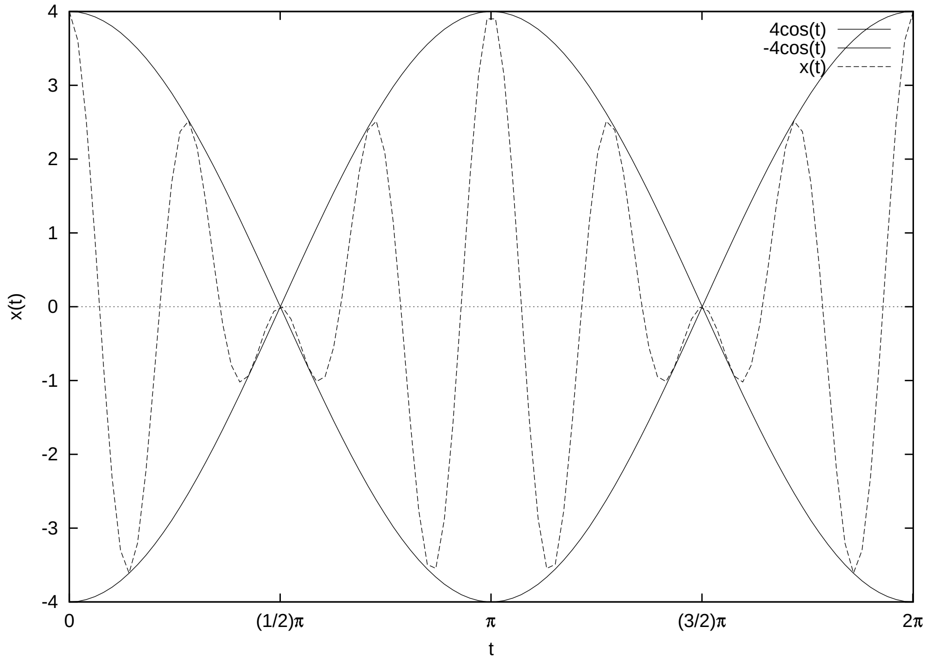
1. 8 点，2. 2 点，3. 10 点．計 20 点.

### 講評

2. で，$k$ の係数が 0 という条件を使っている人がいましたが誤り．平衡点 $x$ の定義 $F(x) = 0$ から求めよう.

## 5

和積公式によれば $x(t) = 4\cos 7t \cos t$. 周期 $2\pi$ の余弦曲線 $\cos t$ (の $\pm 4$ 倍) が包絡線となり, これを上下限として, 周期 $\frac{2}{7}\pi$ で振動する.




$\pm 4\cos t$ を描いた後で, $x(t)$ を描くときの注意. $n$ を整数とする.

- $\cos 7t = 1$ となる $t = \frac{2n}{7}\pi$ では $x(t)$ は $4\cos t$ に接する.
- $\cos 7t = -1$ となる $t = (\frac{2n}{7} + \frac{1}{7})\pi$ では $x(t)$ は $-4\cos t$ に接する. 特に $x(\pi) = +2$.
- $\cos 7t = 0$ となる $x = (\frac{2n}{7} + \frac{1}{14})\pi$ では $x(t) = 0$ となる.
- $4\cos t = 0$ となる $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ でも $x(t) = 0$ となるが, これは上に含まれる. これらの点ではこの 2 つの余弦関数の両方が符号を変えるため, $x(t)$ としては符号が変わらない (負 $\to 0 \to$ 負). 2 次関数 $-(x - \frac{1}{2}\pi)^2$ のような形になる.

### 配点

$\pm 4\cos x$ が正しい 5 点. $x(t)$ がその間を振動している 5 点. 山の個数が 7 個に近い 5 点. 山の個数が正確で, $t = (n/2)\pi$ 近くの様子が正確 5 点. 計 20 点.

### 講評

まあ $t = (n/2)\pi$ 近くの様子まで正確に描くのはちょっと難しかったね. 15 点はとってほしかった.

## お知らせ

ごめんなさい. 返却は 2009-12-01 以降の予定です.

http://hig3.net