現象の数学Bファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-01-26 Tue 更新: Time-stamp: "2010-02-05 Fri 10:45 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

両面です. 全部で5問です. 90分です.

1. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

連成振動を表す $x(t), y(t)$ についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
x'' &= -2x + y \\
y'' &= +2x - 3y
\end{aligned}
$$

を考える.

1. 固有振動数を求めよう.
2. 一般解を求めよう.

2

3 質点の連成振動を表す $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -8x_1 + x_2 \\
x_2'' &= 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 \\
x_3'' &= + x_2 - 8x_3
\end{aligned}
$$

を考える.

1. 固有振動数を求めよう
2. 一般解を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

区間 $[0, L]$ **で定義され**, $f(0) = f(L) = 0$ **を満たす関数** $f(x)$ **の** Fourier **級数変換を考える**. **ここで**, $L > 0$ **は定数**. **また**, **自然数** j **に対して**, $e_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{j\pi}{L} x$ **とする**.

1. **関数** $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}L) \\ 0 & (\textbf{それ以外}) \end{cases}$ **が**, **係数** c_j **によって** $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j(x)$ **と** Fourier **級数展開されるとき**, **係数** c_j **を求めよう**.
2. **関数** $f(x) = \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi}{L} x \quad (0 \leq x \leq L)$ **が**, **係数** c_j **によって** $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j(x)$ **と** Fourier **級数展開されるとき**, **係数** c_j **を求めよう**.

なお, **三角関数に関して**,

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x \qquad \int x \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x$$

が成立することを使ってもよい. **また**, **加法定理**, **積和**, **和積**, **半角**, **倍角などの公式は導かずに使ってよい**.

4

無限区間 $-\infty < x < +\infty$ **上で波動方程式**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

を考える. **ここで** $v > 0$ **である**.

1. (a) $u_1(x, t) = \sin(2x - 2vt)$ **はこの波動方程式を満たすかどうか答えよう**.
   (b) $y = u_1(x, 0)$ **のグラフを**, **縦軸** y, **横軸** x **で描こう**.
   (c) $y = u_1(x, \frac{\pi}{3v})$ **のグラフを**, **縦軸** y, **横軸** x **で描こう**.
2. (a) $u_2(x, t) = \sin(2x) \cos(2vt)$ **はこの波動方程式を満たすかどうか答えよう**.
   (b) $y = u_2(x, 0)$ **のグラフを**, **縦軸** y, **横軸** x **で描こう**.
   (c) $y = u_2(x, \frac{\pi}{3v})$ **のグラフを**, **縦軸** y, **横軸** x **で描こう**.

5

区間 $[0, L]$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 3^2 \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える. ここで $L > 0$ は定数である.

1. $f(x,t) = \sin(px)\cos(\omega t + \phi)$ が波動方程式の解であるとき, p と ω の関係を求めよう. ただし, $p, \omega > 0$ とする.
2. $f(x,t) = \sin(px)\cos(\omega t + \phi)$ が波動方程式の解であり, さらに固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ を満たすとする. このとき p と ω の満たす条件を求めよう.
3. 固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ のもとで波動方程式の一般解を求めよう.
4. 固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ と初期条件

$$\begin{aligned} u(x,0) =& 2\sin\tfrac{\pi}{L}x - \sin\tfrac{2\pi}{L}x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) =& 0 \end{aligned}$$

を満たす波動方程式の解を求めよう.

6　アンケート

これは問題でなくアンケートです.

この問題を一通り解き終わるのに何分かかりましたか. 解き終わらなかった人は, 何分あれば一通り解き終わりそうですか.

また, 自信のある問題, ない問題を答えてください.

授業, プチテストについて自由記述で答えるアンケートを e ラーニングサイトに設置しています. ご協力ください.

現象の数学 B ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2010-01-26 Tue 更新: Time-stamp: "2010-02-05 Fri 10:45 JST hig"

1

1. $x(t) = A\cos(\omega t + \phi), y(t) = B\cos(\omega t + \phi)$ を代入して整理すると,

$$\begin{aligned}(-\omega^2 A + 2A - B)\cos(\omega t + \phi) =& 0\\ (-2A - \omega^2 B + 3B)\cos(\omega t + \phi) =& 0.\end{aligned}$$

   これが任意の t について成立するためには,

$$\begin{aligned}(-\omega^2 + 2)A - B =& 0,\\ -2A + (-\omega^2 + 3)B =& 0.\end{aligned}$$

   これを, A, B に関する 1 次方程式と見なすと, $(A, B) \neq (0, 0)$ である解が存在するためには, 行列式

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + 2 & -1 \\ -2 & -\omega^2 + 3 \end{vmatrix} = 0$$

   が必要である. これを解くと $\omega^2 = 1, 4$. 正のものだけをとって, 固有振動数は $\omega = 1, 2$.

2. それぞれに対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_1, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} C_2. \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

   よって一般解は, 2 つの固有モードの線形結合を作って

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_1 \cos(t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} C_2 \cos(2t + \phi_2).$$

   ここで C_1, C_2, ϕ_1, ϕ_2 は任意定数.

Remark 基準座標をとるなら, 固有ベクトルからわかるように, $X = x - y, Y = 2x + y$.

配点

行列式 4 点, 固有値 2×2 点, 固有ベクトル 2×2 点, 一般解の作り方 4 点, 一般解の任意定数などの詳細 4 点.

講評

平均的にはよくできていました. 一般解を求める問なのに, 固有モードを書き並べただけ, のような答案があったのは残念.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2

1. $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ 以外の解が存在するための条件

$$0=\begin{vmatrix} -\omega^2+8 & -1 & 0 \\ -4 & -\omega^2 & -4 \\ 0 & -1 & -\omega^2+8 \end{vmatrix} = (-\omega^2+8)\begin{vmatrix} -\omega^2+8 & -4 \\ -1 & -\omega^2+8 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -\omega^2+8 \end{vmatrix}$$
$$=(-\omega^2+8)(\omega^4-16\omega^2+56)$$

より, 固有振動数 $\omega=\sqrt{8}, \sqrt{8\pm 2\sqrt{2}}$.

2. 固有振動数に対応する固有ベクトルを求めて

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} C_1\cos(\sqrt{8}\,t+\phi_1)$$
$$+\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} C_2\cos\left(\sqrt{8+2\sqrt{2}}\,t+\phi_2\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ +2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} C_3\cos\left(\sqrt{8-2\sqrt{2}}\,t+\phi_3\right)$$

ここで C_i, ϕ_i は任意定数.

配点

行列式 6 点, 行列式の計算 2 点, 固有値 4 点, 固有ベクトル 4 点, 一般解の作り方 2 点, 一般解の任意定数などの詳細 2 点.

講評

前の問がよくできているのに, 2 次元から 3 次元になっただけで行列式の計算や固有ベクトルの求め方が怪しくなってしまう人がいるのは残念. 3 次元の例題はあまりなかったっていうけど, 線形代数の典型的な問題でしょ.

3

1. $c_j=\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^{\frac{1}{2}L} x\sin\frac{j\pi}{L}x\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{L}{2}}\frac{L}{(j\pi)^2}(-j\pi\cos\frac{j\pi}{2}+2\sin\frac{j\pi}{2})$.

   よって, $c_{2k-1}=-\sqrt{\frac{L}{2}}\frac{2L}{((2k-1)\pi)^2}(-1)^k, c_{2k}=-\sqrt{\frac{L}{2}}\frac{L}{2k\pi}(-1)^k$. $(k=1,2,3,\ldots)$.

2. $\sin\frac{2\pi}{L}x\cos\frac{2\pi}{L}x = \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{L}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}e_4(x)$. よって, $c_j=\int_0^L e_j(x)f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^L e_j(x)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}e_4(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}\delta_{j,4}$.

配点

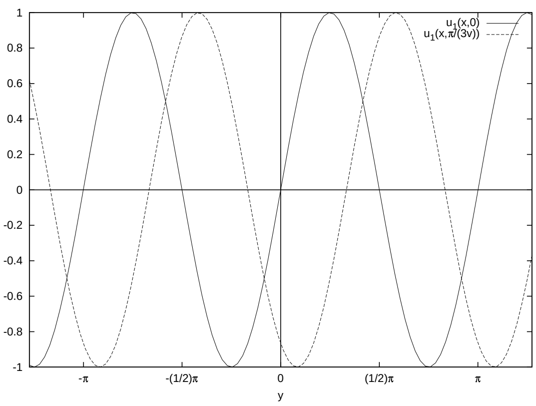
1. $e_k(x)\,\mathrm{d}x$ **を作用させる操作** 3 **点**, **一辺が** c_k **となること** 3 **点** (**導かなくてもおぼえていてもよい**), **もう一辺の積分計算** 4 **点**.
2. $e_k(x)\,\mathrm{d}x$ **を作用させる操作** 3 **点**, **一辺が** c_k **となること** 3 **点** (**導かなくてもおぼえていてもよい**), **もう一辺の積分計算** 4 **点** (**半角** 1 **積和** 1 **場合分け** 1 **最終的な答** 1)

講評

Fourier **級数変換って難しいのかな〜ひとつは考え方で**, δ_{jk} **の扱いが怪しかったり**, c_j **がいつのまにか** c_k **になったり**, c_k **が出てくることがわかってる辺を一所懸命計算していたり** (**しかも** $j=k$ **を特別扱いし忘れてる**) **のようなケース**. **もうひとつは積分の計算で**, **公式を適用するときに置換積分を正しく適用していないケースですね**. **最後のころの授業でだいぶ強調したんだけどな〜**

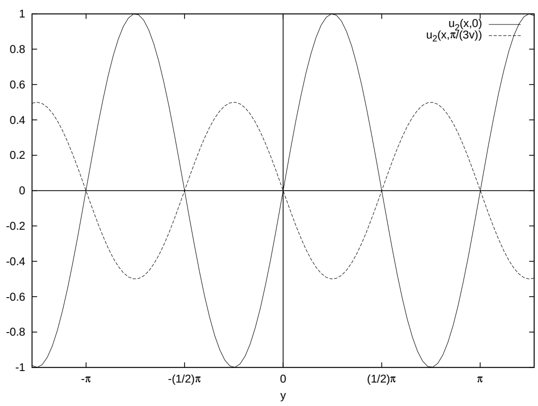
4

1. (a) **代入してみると成立している**. **そのまま** d'Alembert **の解の形である**.

   (b) 

   (c) $u_1(x, \frac{\pi}{3v}) = \sin(2(x - \frac{\pi}{3}))$ **なので**, **波の形** $u_1(x,0)$ **が** x **軸の正の方向に** $\frac{\pi}{3}$ **だけ進んだもの**.

2. (a) **代入してみると成立している**. $u_2(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(2(x-vt)) + \sin(2(x+vt))$ **と書きかえると** d'Alembert **の解の形である**.

   (b) $u_2(x, \frac{\pi}{3v}) = -\frac{1}{2}\sin(2x)$ **なので**, **波の形** $u_2(x,0)$ **を** y **軸の方向に** $-\frac{1}{2}$ **倍したも**


の.

(c) 波は左に進む部分 $f(x+vt)$ と右に進む部分 $f(x-vt)$ の重ね合わせになっているがその事実を使って描くのは疲れる. 直接 $t=\frac{\pi}{3v}$ を代入して描くほうが楽. 結果的には左右に進まずその場で振動する (定在波になっている) ことがわかる.

配点

1(a)4 点 (b)2 点 (c)3 点, 2(a)4 点 (b)2 点 (c)3 点.

講評

5

1. 波動方程式に代入して両辺を比較することにより, $\omega=3p$.
2. $\sin(p0)\sin(pL)=0$ より, $p=\frac{j\pi}{L}$, $\omega=\frac{3j\pi}{L}$. j は整数 (自然数のみに限ってもよい).
3. 上で求めた p,ω が固有モードに対応するので, 一般解は, その線形結合を考えて, $u(x,t)=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}c_j\sin(\frac{j\pi}{L}x)\cos(\frac{3j\pi}{L}t+\phi_j)$. ただし, c_j,ϕ_j は任意の定数.
4. $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ より $\phi_j=0$. やまかんまたは Fourier 級数展開によって c_j を定めて, $c_1=2, c_2=-1$, それ以外は $c_j=0$. すなわち, $u(x,t)=2\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{3\pi}{L}t-\sin\frac{2\pi}{L}x\cos\frac{6\pi}{L}t$.

配点

1,2,3,4 各 5 点.

講評

お知らせ

ごめんなさい. 答案返却や点数通知は 2010-02-03 以降の予定です.

http://hig3.net