現象の数学 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-09-29 Tue 更新: Time-stamp: "2009-10-06 Tue 09:00 JST hig"

1 略解:単振動

1.1 略解:単振動の運動方程式を解こう!

略解 まず斉次方程式 $x'' + 4x = 0$ の一般解を求める. $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて代入すると,

$$(\lambda^2 + 4)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$$

より $\lambda = \pm 2i$. よって一般解は,

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2it} + C_2\mathrm{e}^{-2it} = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

一方, 非斉次方程式の特解として, $x(t) = 4$ がある. $x(t) = C$(定数) とおいて代入してみると発見できる.

よって, 非斉次方程式の一般解は

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + 4.$$

初期条件より A, B を定めると,

$$x(t) = \tfrac{3}{2}\cos 2t + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin 2t + 4 = 3\cos(2t - \tfrac{1}{3}\pi) + 4.$$

講評

1. 非斉次方程式の解じゃなく, 斉次方程式の解の段階で初期条件を課してる人が多くいたけど変でしょ〜だって, 問題で求めてるのは, (1) 非斉次方程式の解であって, (2) かつ初期条件を満たしてるやつ, だもん
2. $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + 1 \times \sin\theta$ になっちゃってる人が多くいました.
3. $x(t) = C_1\mathrm{e}^{2it} + C_2\mathrm{e}^{-2it} = A\cos 2t + B\sin 2t = a\cos(2t + \phi)$. 積分定数の組 $(C_1, C_2), (A, B), (a, \phi)$ どれについて初期条件で連立方程式をたててもいいんだけど, たぶん (A, B) に対してたてて, (a, ϕ) を求めるのがいちばん楽でしょう. まあどれでも自分の芸風で間違わずに計算してくれればいいんだけど. 物理数学の時は, 必ず (C_1, C_2) を求めようってのりで説明してたけど, それはやりかたの単純さを計算の楽さよりも優先してたため.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

2　一般の力 (ポテンシャル) のもとでの微小振動

今日の目標

- 最初から引っ張られてるばねの振動数はどう変化する?
- フックの法則が成り立たない時は単振動じゃなくなる?
- ばねの縦振動と横振動の振動数の違いは?

2.1　quiz:微小振動の周期を求めよう!

質量 $m = 1$ の質点の時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x) = 1 - 2\sin x$ がはたらく.

1. 運動方程式を書こう.
2. 平衡点を (すべて) 見つけよう.
3. 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
4. 質点が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周期を求めよう. 平衡点が複数ある場合は, 適当にひとつ選んで考えればよい.
5. この力のポテンシャル $U(x)$ を求め, グラフを描こう.

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

小形 p.12-14 ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14) ばねの横振動 小形 1 章演習問題 [4][5][6](p.14)

次回の予習ポイント

テイラー展開. 力の (水平方向, 鉛直方向) や (斜面に沿った方向, 法線方向) への分解.
e ラーニングシステム `https://r-els.media.ryukoku.ac.jp` で予習復習問題をやろう.

学習サポート

オフィスアワー　月昼と火 4(1-502)

チューター　金 3(1-614).

携帯出席登録
`http://hig3.net/`

目次 前回 次回 略解