現象の数学 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2009-10-13 Tue 更新: Time-stamp: "2009-10-12 Mon 08:35 JST hig"

2 略解:一般の力 (ポテンシャル) のもとでの微小振動

2.1 略解:微小振動の周期を求めよう!

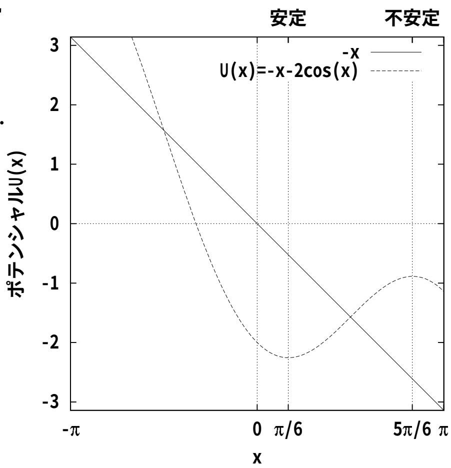
略解

1.
$$x''(t) = 1 - 2\sin x.$$

2. $F(x) = 1 - 2\sin x = 0$ を解いて, 平衡点は $x = \frac{1}{6}\pi + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $F'(x) = -2\cos x$. $F'(\frac{1}{6}\pi + 2n\pi) = -\sqrt{3} < 0$, $F'(\frac{5}{6}\pi + 2n\pi) = +\sqrt{3} > 0$ より, 安定な平衡点は $x = \frac{1}{6}\pi + 2n\pi$.

4. 安定な平衡点 $x = \frac{1}{6}\pi$ について考える. $F(x)$ を $x = \frac{1}{6}\pi$ においてテイラー展開すると,



$$1 - 2(\sin\tfrac{1}{6}\pi + \cos\tfrac{1}{6}\pi(x - \tfrac{1}{6}\pi) + \cdots) = -\sqrt{3}(x - \tfrac{1}{6}\pi) + \cdots$$

よって, $x = \frac{1}{6}\pi$ の近くでの運動は単振動

$$x''(t) = -\sqrt{3}(x(t) - \tfrac{1}{6}\pi)$$

で近似できる. $X = x - \frac{1}{6}\pi$ とおくと

$$X'' + \sqrt{3}X = 0.$$

これは単振動で, $X(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ を代入してみると,

$$(-\omega^2 + \sqrt{3})A\cos(\omega t + \phi) = 0. \tag{2.1}$$

任意の t に対してこれが成立するためには $\omega = 3^{1/4}$. よって解は $x(t) = X(t) + \frac{1}{6}\pi = A\cos(3^{1/4}t + \phi) + \frac{1}{6}\pi$. 単振動の周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \cdot 3^{-1/4} \cdot \pi$.

5. $U(x) = -\int^x F(x')\mathrm{d}x' = -x - 2\cos x$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評

1. $F'(x), F''(x)$ とか関係ないよ. $F(t)$ でもないよ.
2. 自分で新しい変数 n とか使う時は, どの範囲の値をとるか書こうよ.
3. 安定な平衡点って, 平衡点であって (等式), かつ安定の条件 (不等式) を満たすものでしょ.
4. ここは説明が足りなかったか. $(-\omega^2+\sqrt{3})A\cos(\omega t+\phi)=0$ までで止まっているひと多数. この式がどんな t でも成り立つことから, (あとから決めるつもりでいれておいた) 定数 ω が決まって $x(t)=A\cos(3^{1/4}t+\phi)$, っていう流れって, $(\lambda^2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\lambda t}=0$ より $x(t)=\mathrm{e}^{3^{1/4}it}$ って流れと同じだから類推きくかと思ったんだけど.
5. $-x$ のグラフを $-2\cos(x)$ だけずらせばよい, という考え方ができた人は意外に少なかった. これは常套手段です. その人々の中でも, グラフになってない (ひとつの x にふたつ以上 $U(x)$ が存在しちゃう) 図の人が多かったのは残念. もちろん増減表とか書けば間違わないと思うけど.
   それはそうと, これが坂の形だと思うと, (不) 安定な平衡点や微小振動の意味って納得いかない?

3　振り子の運動

今日の目標

- 振り子の周期は何から決まる?
- ばねの縦振動と横振動の周期は同じ?

3.1　quiz:微小振動の周期を求めよう!

質量 $m=1$ の質点の時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x)=\mathrm{e}^{-6x}-\mathrm{e}^{-2x}$ を受けて運動している.

1. 運動方程式を書こう.
2. 平衡点を (すべて) 見つけよう.
3. 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
4. 質点が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周期を求めよう.

今日の範囲に対応する参考書のお奨め問題

ばねの横振動 小形 1 章演習問題 [4][5][6](p.14)

次回の予習ポイント

連立 1 次方程式の解の存在条件, 行列式の計算

e ラーニングシステム https://r-els.media.ryukoku.ac.jp で予習復習問題をやろう.

今回から, 回答時間の上限を設け, また締切を月曜日の夜にします. 採点・分析の都合ですのでご協力ください.

学習サポート

quiz 返却と前回以前の資料配布 1-503 前掲示板のところでやっています.

オフィスアワー 月昼と火 4(1-502)

チューター 金 3(1-614).

携帯出席登録
http://hig3.net/

目次 前回 次回 略解