現象の数学 B プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-11-09 Tue 更新: Time-stamp: "2011-01-16 Sun 12:35 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'' &= -4x_1 + x_2 \\ x_2'' &= -2x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

を考える. 基準座標を求め, 基準座標について解こう. さらに, この微分方程式系の一般解を求めよう.

2

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'' &= -4x_1 + x_2 \\ x_2'' &= -2x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

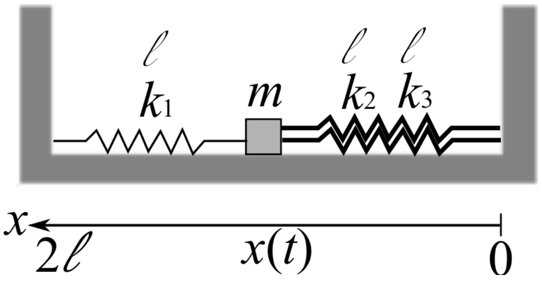
を考える. 固有周波数, 固有モードを求めて, この微分方程式系の一般解を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

過程不要

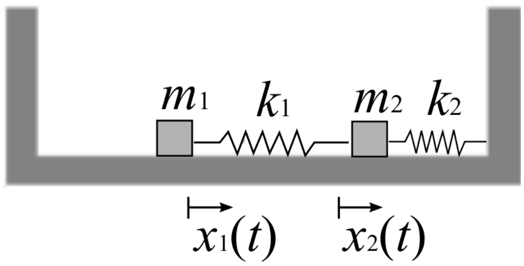
質量 m の物体に, 自然長 ℓ, ばね定数 k_1, k_2, k_3 の 3 つのばねをとりつけ, 図のように, 間隔 2ℓ の壁の間に設置した. 壁の位置を原点とする左向きの x 軸をとる. 時刻 t における物体の位置 $x(t)$ についての運動方程式を書こう.



4

過程不要

質量 m_1, m_2 の 2 つの物体が, 図のようにばね定数 k_1, k_2 のばねに接続されている. x_1, x_2 は図の向きにはかった, 平衡点 (力を受けない点) からの変位である. x_1, x_2 についての運動方程式を書こう.



5

質量 $m = 2$ の物体が位置 x にあるとき, 位置により定まる力

$$F(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

をうける. 平衡点をすべて挙げ, それぞれ安定, 不安定であるかを判定しよう.

6

微分方程式

$$3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -12x(t) + 36$$

を考える．初期条件 $x(0) = 2, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -2\sqrt{3}$ を満たす解 $x(t)$ を定めよう．

7

質量 $m = 2$ の物体が x 軸上を，力

$$F(x) = 3\cos(4x)$$

を受けて運動する．安定な平衡点 $x = \frac{1}{8}\pi$ のまわりの微小振動の周波数と周期を求めよう．

8

単振動する物体の時刻 t における位置が

$$x(t) = 8 + 2\cos(2t) + 2\sin(2t)$$

で与えられる．

1. $x(t)$ のグラフを，$0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で描こう．最終的な図だけでなく，描くのに使った補助線を残そう．t, x 軸上に主な値を記そう．
2. 単振動の振幅，周期，周波数を求めよう．

9

関数 $x(t) = 3\cos(3t) + 3\cos(5t)$ のグラフを，横軸 t 縦軸 x で描こう．

最終的な図だけでなく，描くのに使った補助線や包絡線を残そう．振幅や速い振動遅い振動の周期がわかるように，t, x 軸上に主な値を記そう．

現象の数学 B プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2010-11-09 Tue 更新: Time-stamp: "2011-01-16 Sun 12:35 JST hig"

配点　1,2 各 15 点, 3-9 各 10 点. 100 点満点.

1

微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とかける.

K^{t} の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ として, 基準座標 $X_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{x} = x_1 + x_2$, $X_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{x} = 2x_1 + x_2$ を考える.

与えられた微分方程式から (1)+(2), 2(1)+(2) を作ると, $X_1'' = -6X_1$, $X_2'' = -5X_2$ となり, これを解いて, $X_1(t) = A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1), X_2(t) = A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2)$. よって

$$\begin{aligned} x_1(t) =& X_2 - X_1 = -A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1) + A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2) \\ x_2(t) =& 2X_1 - X_2 = 2A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1) - A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2) \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.

配点　${}^{\mathrm{t}}K$ の固有ベクトル 3 点, 基準座標 4 点, 基準座標の一般解 4 点, x_1, x_2 の一般解 4 点.

講評　過去の試験問題では $x_1 \pm x_2$ で基準座標が求められたケースもあったかもしれない (そしてそういうときは基準座標を霊感で見つけられたかもしれない) けど, それはふつうのことではないのでご注意. 授業では, ${}^{\mathrm{t}}K$ の固有ベクトルから作るっていったでしょ.

2

微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とかける.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$ とおいて代入すると,

$$(i\omega)^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t} = -K \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\omega t}$$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

よって ω^2 は K の固有値, $\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right)$ は K の固有ベクトル.

K の固有値固有ベクトルは $\lambda = \sqrt{6}, \sqrt{5}$, $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ なので, 固有周波数 $\omega = \sqrt{6}, \sqrt{5}$. 固有モードは,

$$\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) C_1 \mathrm{e}^{+i\sqrt{6}t} + \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{6}t} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1) \quad \text{と} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) A_2 \cos(5t - \theta_2)$$

一般解は固有モードの線形結合で

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2)$$

ここで $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.

配点　${}^{\mathrm{t}}K$ の固有ベクトル 3 点, 基準座標 4 点, 基準座標の一般解 4 点, x_1, x_2 の一般解 4 点.

講評　本当は, なぜ固有値固有ベクトルから固有周波数, 固有モードが求められるのかという過程まで書いて欲しかったんだけど, 今回はそれがなくても減点していません.

x_1=固有モード 1, x_2=固有モード 2, みたいな不思議な答も. 固有モードってベクトル値関数でしょ.

3

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -(k_1 + k_2 + k_3)(x(t) - \ell)$$

.

4

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= +\, k_1(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -\, k_1(x_2 - x_1) - k_2 x_2 \end{aligned}$$

5

$F(x) = x(x-2)(x-5) = 0$ を解いて, 平衡点は $x = 0, 2, 5$.
$F'(0) > 0, F'(2) < 0, F'(5) > 0$ より, $x = 0, 5$ は不安定, $x = 2$ は安定.

6

$X = x - 3$ とおくと，$X'' = -4X$．よって，一般解は $X(t) = A\cos(2t - \theta)$ すなわち $x(t) = 3 + A\cos(2t - \theta)$．($A, \theta$ は任意定数).

初期条件より，$A = 2, \theta = \frac{4}{3}\pi$ で，$x(t) = 3 + 2\cos(2t - \frac{4}{3}\pi) = 3 - \cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t$.

講評　物理数学 II の問題.

7

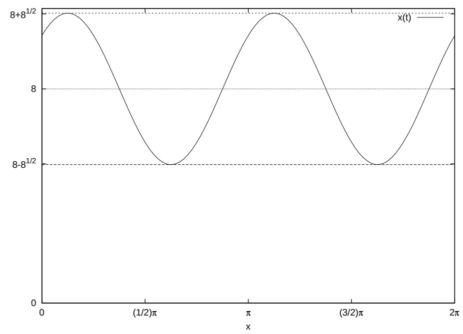
$F(x)$ を $x = \frac{1}{8}\pi$ のまわりでテイラー展開すると，

$$F(x) = 0 - 12(x - \tfrac{1}{8}\pi) + \cdots$$

よって $X = x - \frac{1}{8}\pi$ とすると，微小振動の運動方程式は $2X'' = -12X$ で，周波数は $\sqrt{6}$，周期は $2\pi/\sqrt{6}$.

8

三角関数の合成により，$x(t) = 8 + \sqrt{8}\cos(2t - \frac{1}{4}\pi)$.



$x(t) = 8$ となるのは，$t = \frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$．$x(0) = 10$ にも注意.

振幅は $\sqrt{8}$，周波数 2，周期は π.

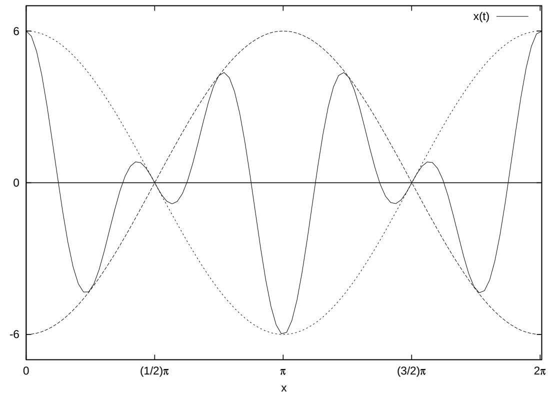
講評　cos+sin にはそのままでは和積公式はない．導出方法を思い出すとわかるはず．無理にやるなら，どちらかを $\cos\theta = \sin(\theta + \frac{1}{2}\pi)$ をつかって一方にそろえてからやる．三角関数の合成と同じ結果になるはず.

配点　1 が 7 点，2 が 3 点.

9

和積公式を使って

$$x(t) = 6\cos(4t)\cos(t).$$



講評　遅い振動 $= 0$ となるあたりの様子は，正確に描けてなくても減点していません．すでに持っている三角関数の知識から描けてもおかしくないんだけどね．

http://hig3.net