現象の数学 B ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2011-01-25 Tue 更新: Time-stamp: "2011-02-06 Sun 22:11 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
2. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

配点 1,2 各 15 点, 3-9 各 10 点.

1

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'' &= -8x_1 + x_2 \\ x_2'' &= +6x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

を考える. 基準座標を求め, 基準座標について解こう. さらに, この微分方程式系の一般解を求めよう.

2

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'' &= -4x_1 - x_2 \\ x_2'' &= -4x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ x_3'' &= \qquad - x_2 - 4x_3 \end{aligned}$$

を考える. 2 番目に小さい固有周波数と, 対応する固有モードを求めよう.

3

$N = 5$ 物体の連成振動をあらわす微分方程式

$$mx_i'' = +kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

を考える. ただし, $x_0 = x_6 = 0$ とする (両端のばねは壁に固定されているとする)

2 番目に大きい固有周波数と, 対応する固有モードを求めよう. ただし, N 物体の連成振動の固有周波数, 固有モード, 分散関係などの公式を使ってよい. $\sin$ は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加関数だから, ω_ℓ を全部計算してみなくても, ℓ の大小でわかるでしょ. 分散関係のグラフがイメージできていてもわかるし.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

$\boxed{\text{過程不要}}$長さ L のゴムひものののび $u(x,t)$ は区間 $[0,L]$ の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を満たす．解 $u(x,t) = \sin(\frac{\pi}{L}x)\cos(\frac{\pi v}{L}t)$ を考える．$v > 0$ は定数．

1. 点 $x = \frac{1}{6}L$ における変位の変化の様子を，横軸 t 縦軸 u で描こう．
2. 時刻 $t = \frac{5L}{6v}$ における変位の様子を，横軸 x 縦軸 u で描こう．

過程は不要だが，補助線や軸上の座標の値などは記そう．

5

$\boxed{\text{過程不要}}$両端を固定して張った弦の振動は，授業で採用した記法では，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

で表現される

次の変数，定数，関数 (a)–(e) の意味を，下の語句群 1–10 からそれぞれ選ぼう．

(a) u
(b) x
(c) t
(d) v
(e) L

1. 弦の変位
2. 弦の温度
3. 弦の長さ
4. 弦の断面積
5. 弦の質量
6. 弦のヤング率
7. 弦が張られたのと平行な方向の座標
8. 弦が張られたのと垂直な方向の座標
9. 弦を張ったペンギンの体重
10. 時刻
11. 進行波の速さ
12. 進行波の振幅
13. 進行波の波長

6

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える．ただし，$v > 0$ は定数である．

ある解が $u(x,t) = a(x) \times b(t)$ と書かれるとき，変数分離法で，それぞれ $a(x), b(t)$ の満たす微分方程式を求めよう．ただし，求めた微分方程式は解かなくてよい．また，境界条件や初期条件のことは気にしなくてよい．

7

区間 $[0, L]$ の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

の一般解は

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin \tfrac{\ell\pi}{L} x [A_\ell \cos \tfrac{\ell\pi v}{L} t + B_\ell \sin \tfrac{\ell\pi v}{L} t]$$

で与えられる．A_ℓ, B_ℓ は任意定数である．

初期条件が $u(x,0) = -2\sin(\frac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -3\sin(\frac{2\pi}{L}x)$ のとき，定数 A_ℓ, B_ℓ を定めよう．

フーリエ級数変換を利用しないで，霊感解法で直観的にやっていい．

8

$\boxed{\text{過程不要}}$ $L > 0$ とする．関数 $f(x) = 3\sin\frac{3\pi}{L}x - 5\sin\frac{7\pi}{L}x$ に対して，

$$A(n, L) = \int_0^L \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{n\pi}{L} x \times f(x)\, \mathrm{d}x$$

を求めよう．ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$．

9

$u(x,t) = f(x+3t) + \frac{1}{2} f(x-3t)$，ただし

$$f(z) = \begin{cases} z & (0 \le z \le 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする．

1. $t = 1$ のとき，$y = u(x,t)$ のグラフを，横軸 x，縦軸 y で描こう．
2. $t = \frac{1}{3}$ のとき，$y = u(x,t)$ のグラフを，横軸 x，縦軸 y で描こう．

現象の数学 B ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2]　配布: 2011-01-25 Tue 更新: Time-stamp: "2011-02-06 Sun 22:11 JST hig"

配点　1,2 各 15 点, 3-9 各 10 点. 100 点満点.

1

微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とかける.

K^{t} の固有値は $\lambda = 5, 10$, 固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ なので, 基準座標の例は $X_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 = 2x_1 + x_2$, $X_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{x} = 3x_1 - x_2$.

これら基準座標の満たす微分方程式は, $2 \times (1) + (2)$, $3 \times (1) - (2)$ を作って, $X_1'' = -5X_1, X_2'' = -10X_2$. これを解くと,

$$\begin{aligned} X_1(t) =& A_1 \cos(\sqrt{5}t - \theta_1), \\ X_2(t) =& A_2 \cos(\sqrt{10}t - \theta_2). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} x_1(t) =& \tfrac{1}{5}(X_1(t) + X_2(t)) = C_1 \cos(\sqrt{5}t - \theta_1) + C_2 \cos(\sqrt{10}t - \theta_2), \\ x_2(t) =& \tfrac{1}{5}(3X_1(t) - 2X_2(t)) = 3C_1 \cos(\sqrt{5}t - \theta_1) - 2C_2 \cos(\sqrt{10}t - \theta_2). \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.

配点　2 個の基準座標に各 2 点, 基準座標の満たす微分方程式に各 2 点, 基準座標の一般解に各 2 点, x_1, x_2 について解けていることに 3 点.

2

微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とかける.

K の固有値は $\lambda = 4, 4 \pm 2\sqrt{2}$. 固有周波数は $\omega = \sqrt{4}, \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$. 2 番目に小さいのは $\omega = \sqrt{4}$.

$\lambda = 4$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

よって, 2 番目に小さい固有周波数 $\omega = 2$ に対する固有モードは

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} C_2 \cos(2t - \theta_2).$$

ここで, C_2, θ_2 は任意定数.

配点　固有周波数に 5 点, 固有ベクトルに 5 点, 固有モードに 5 点.

3

$N = 5$ とするとき, ℓ 番目の固有モード $(\ell = 1, 2, 3, 4, 5)$ は

$$\begin{pmatrix} \sin \frac{1\ell\pi}{(5+1)L} x \\ \sin \frac{2\ell\pi}{(5+1)L} \\ \sin \frac{3\ell\pi}{(5+1)L} \\ \sin \frac{4\ell\pi}{(5+1)L} \\ \sin \frac{5\ell\pi}{(5+1)L} \end{pmatrix} C_\ell \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell).$$

ここで, 固有周波数 ω_ℓ は分散関係から

$$\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\ell\pi}{2(5+1)}$$

で与えられる. したがって, 2 番目に大きい固有周波数は, $\ell = 4$ で,

$$\omega_4 = 2\sqrt{\tfrac{k}{m}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\tfrac{3k}{m}}.$$

固有モードは

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} C_4 \cos\left(\sqrt{\tfrac{3k}{m}} t - \theta_4\right).$$

C_4, θ_4 は任意定数.

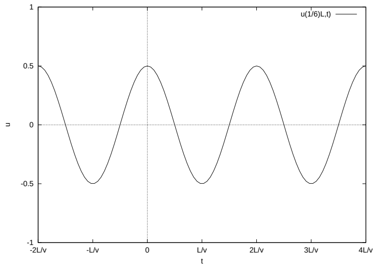
Remark　$\sin$ は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で増加関数だから, ω_ℓ を全部計算してみなくても, ℓ の大小でわかるでしょ. 分散関係のグラフがイメージできていてもわかるし.

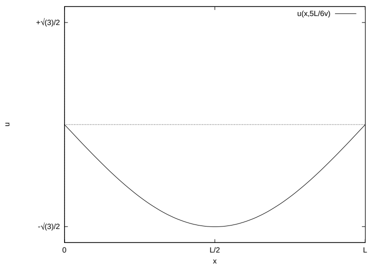
配点　固有周波数に 5 点, 固有モードに 5 点.

講評　これは外部記憶ペーパーを活用しないとしんどい問題. 物体の個数 N, 物体番号 n, モード番号 ℓ の区別がついてない人が一定数いました.

4

1. $u(\frac{1}{6}L,t)=\sin(\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi v}{L}t)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi v}{L}t)$.
2. $u(x,\frac{5L}{6v})=\sin(\frac{\pi}{L}x)\cos\frac{2}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{L}x)$





配点　各グラフの振幅, 周期, 描くべき範囲に各 1 点, 位相に 2 点.

講評　固定端の弦だから, $0\leq x\leq L$ だけ描く.

5

(a) 1
(b) 7
(c) 10
(d) 11
(e) 3

配点　各 2 点. (a) に対する答 8 はもっとも適切な答えではないが部分点 1 点.

6

波動方程式に $u=ab$ を代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(a(x)b(t))=v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)b(t))$$

$$\begin{aligned} a(x)b''(t)=&v^2a''(x)b(t)\\ \frac{1}{v^2}\frac{b''(t)}{b(t)}=&\frac{a''(x)}{a(x)} \end{aligned}$$

ここで, 左辺は x に依存せず, 右辺は t に依存しない. よって両辺は定数であるので, これを C とおくと,

$$\begin{aligned} a''(x)=&Ca(x)\\ b''(t)=&-Cv^2b(t) \end{aligned}$$

配点　偏微分を常微分で書き換えるところで 2 点, 各辺に x, t を集めるところで 2 点, これを定数 C とおくところで 2 点, 定数である理由に 2 点, 分離した微分方程式に 2 点.

講評　この証明でいちばん大事な部分は, C が定数であること, そしてその理由. 過程にはその 2 つが必要不可欠.

7

初期条件には, $\ell = 1, 2$ のモードだけが現れているので, $A_3 = A_4 = \cdots = 0, B_3 = B_4 = \cdots = 0$ としてよい. このとき,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) =& \sin\tfrac{1\pi}{L} \times A_1 + \sin\tfrac{2\pi}{L} \times A_2, \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) =& \sin\tfrac{1\pi}{L} \times \tfrac{1\pi v}{L} B_1 + \sin\tfrac{2\pi}{L} \times \tfrac{2\pi v}{L} B_2.
\end{aligned}
$$

初期条件と比較して,

$$
\begin{aligned}
A_1 =& -2, A_2 = A_3 = \cdots = 0, \\
B_1 =& 0, B_2 = \tfrac{-3L}{2\pi v}, A_3 = A_4 = \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

配点　A_1, B_2 に各 3 点. $A_2 = B_1 = 0$ に 1 点. (明示的でなくても) それ以外は 0 に 3 点.

講評　$A_\ell = 2, B_\ell = -3L/(2\pi v)$ という答が一定数あった. 両辺の形をちゃんと見比べていない答.

8

$e_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{m\pi}{L} x$ とするとき, $f(x) = \sqrt{\frac{L}{2}}(3e_3(x) - 5e_7(x))$ である. $e_m(x)$ の間に正規直交関係

$$
\int_0^L e_m(x) e_n(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{mn}
$$

が成立することに注意すると,

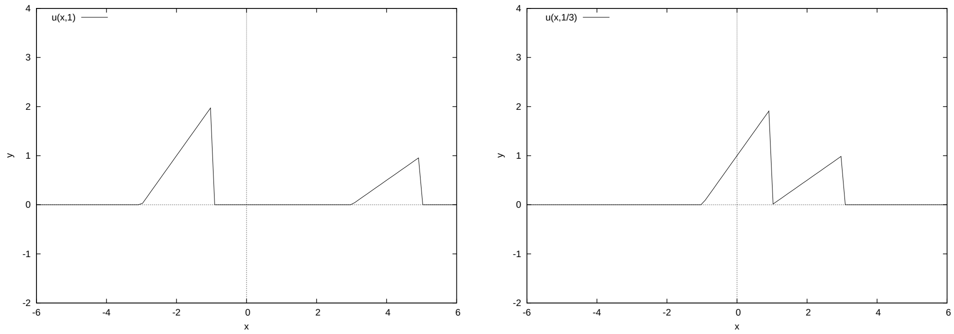
$$
\begin{aligned}
A(n,L) =& \int_0^L e_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x \int_0^L e_n(x) \sqrt{\tfrac{L}{2}}(3e_3(x) - 5e_7(x))\, \mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{L}{2}}(3\delta_{n3} - 5\delta_{n7}) \\
=& \begin{cases} 3\sqrt{\frac{L}{2}} & (n = 3) \\ -5\sqrt{\frac{L}{2}} & (n = 7) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

配点　$A(3, L)$ が 4 点, $A(7, L)$ が 4 点, それ以外の n が 2 点

講評　この問は, 事前の予告通りの形の出題ではなかったですが, 右辺の計算の部分だけを出題した感じですね. 三角関数の積和公式が使えれば積分できるはずです. また, 左辺の計算で出てくる正規直交関係が使えればもっと楽に (上の解答例のように) 計算できるはずです.

答にかなり近づいている人の中に, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A(n,L)$ を計算してしまっている人が多くいました. 7 で $A_\ell = 2$ と答えてしまうのと似た感覚でしょうか. ℓ や n に依存した形 (δ を使ったり場合分けしたり) で答えなきゃいけないんだよ.

9



配点　正の側のほうが高さが 1/2 であることに 3 点. 1,2 で x 方向のずれが正しいことに各 2 点. $f(z)$ のグラフが正しいことに 3 点.

http://hig3.net