L01 単振動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L01(2010-09-28 Tue)

今日の目標

1. ばねの運動方程式と初期条件を (再び) 書けるようになろう.
2. 単振動の運動方程式を解けるようになろう.
3. 初期条件が与えられたときに正しいグラフが描けるようになろう

http://hig3.net

この授業ののり

成績計算 科目の成績 100 ピーナッツは

- 13 ピーナッツ:毎回授業での quiz
- 7 ピーナッツ:毎回授業での携帯アンケートへの反応
- 30 ピーナッツ:プチテスト いまのところ 2010-11-09 を予定
- 50 ピーナッツ:ファイナルトライアル
- 追加 10 ピーナッツ:授業時間外の予習復習
  - 授業後に e ラーニングサイト ReLS で表示される問題に解答. 水曜昼から月曜夜まで解答可能.
- 追加 0–10 ピーナッツ?:模範解答を作ろうプロジェクトへの参加 (あるかどうか未定)
  - e ラーニングサイト ReLS で時々出題される問題に対して模範解答を投稿. 追って説明します.

欠席届ポリシー変えました. 専用用紙に事情を説明する書類を貼って, 授業前後各 5 分に提出 (事前事後とも可. ファイナルトライアルが締切)
オフィスアワー月昼と火 6. 1-502.

参考書

これまでの科目の内容をがんがん使います.

線形代数

松本 で松本, 線形代数入門 — 理論と計算法徹底ガイド, 共立出版 (2007) より引用.

物理数学, 力学

高木 I で高木, 力学 (I), 裳華房 (2001) より引用, 高木 II で高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用.

数理モデル基礎 I

一樂-一樂 で一樂-一樂, 微分方程式 そのまま使える答えの書き方, 講談社サイエンティフィク (2003) より引用.

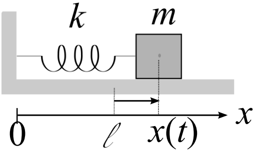
現象の数学 B

小形 で小形, 振動・波動, 裳華房 (1999) より引用.

ばねの運動の運動方程式を立てよう

高木 I §4.1　小形 §1.2

- 質量 m
- 時刻 t における位置 $x(t)$
- $\boxed{}$ ℓ
- 変位=自然長からのずれ (符号あり)= $\boxed{}$



フックの法則

ばねの復元力の

- 大きさは $k \times |\,$変位$\,|$
- 向きは変位と逆向き
- $\boxed{}$ k

今の場合, 変位 $= x(t) - \ell$. 力 $F = \boxed{}$.

運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = -k(x(t) - \ell)$$

覚え方: (左辺の x'' の係数が正なら) 右辺の $x(t)$ の係数はいつでも負. 戻す向きの力だから.

ばねの運動の運動方程式を解こう

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k\ell}{m}$$

これって数理モデル基礎 I のりでいうと, どんな微分方程式?

- 2 階
- $\boxed{}$ $\cdots$ x が出てくるところは $(x)^1$ のみ.
- $\boxed{}$ $\cdots$ x の 0 次の項 $\boxed{}$ がある

微分方程式の一般解の求め方

数理モデル基礎 I

一樂-一樂 §3.2.2

(せ) 斉次微分方程式 (非斉次項, つまり x について 0 次の項, を 0 とおいた方程式) の一般解を求める $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$.

(ひ) 非斉次微分方程式 (そのままの方程式) の解を, やまかんでもいいからひとつ求める (特解) $X(t)$.

(わ) 非斉次微分方程式の一般解は $x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+X(t)$.

例

Example

単振動の微分方程式

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k\ell}{m}$$

の一般解を求めよう.

オイラーの公式

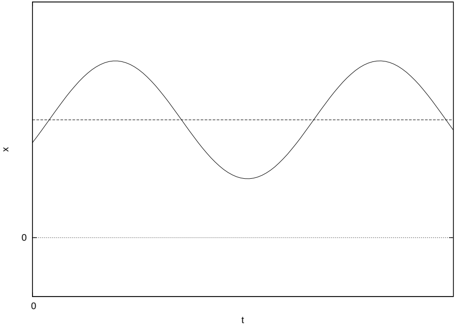
$\theta \in \mathbb{R}$ のとき, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$\omega = \sqrt{k/m}$

$$
\begin{aligned}
x(t) =& \underbrace{C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)}_{\text{斉次方程式の一般解}} + \underbrace{\ell}_{\text{非斉次方程式の特解}} \\
=& \sqrt{C^2+D^2}\left(\cos\omega t \frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}} + \sin\omega t \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}\right) + \ell \\
=& A\cos(\omega t - \theta) + \ell
\end{aligned}
$$

θ は, $\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}, \sin\theta = \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}$ となるような $\theta \in \mathbb{R}$ を選ぶと, $\cos$ の加法定理で上のように変形できる

- $A > 0$
- ω
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $f = \frac{1}{T}$



- $\omega t - \theta$
- $-\theta$

初期条件から積分定数を決めろって言われたら?

例えば $x(0) = 4, x'(0) = \frac{1}{2}$ のような初期条件.
(C_1, C_2), (A, B), (C, D), (A, θ) のどの段階で決めてもよい.
変形していくと, 最後は同じ形になる.

Quiz

上の状況で, $x(0) = \frac{3}{4}\ell$, $x'(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell(\frac{k}{m})^{1/2}$ のとき, 特解を求めよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.1–p.11

- コイルとコンデンサ 小形 例題 1.2(p.7),
- ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14)
- コイルとコンデンサ 小形 1 章演習問題 [7](p.14)

次回の予習ポイント

- テイラー展開 (微積分・演習 I)
- ポテンシャルエネルギー (物理数学 II, 力学, ベクトル解析)

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜