現象の数学 B プチテスト

樋口さぶろお[1]　配布: 2011-11-15 Tue 更新: Time-stamp: "2011-12-06 Tue 09:51 JST hig"

プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -8x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2''(t) &= +3x_1(t) - 7x_2(t) \end{aligned}$$

を考える.
固有周波数, 固有モード, 一般解を求めよう.

2

質量 $m = 2$ の物体が x 軸上を, 力

$$F(x) = \mathrm{e}^{-4x+8} - \mathrm{e}^{-x+2}$$

を受けて運動する. 安定な平衡点 $x = 2$ のまわりの微小振動の周波数と周期を求めよう.

3

質量 $m = 2$ の物体が位置 x にあるとき, 位置により定まる力

$$F(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x$$

をうける.
平衡点をすべて挙げ, それぞれが安定か不安定かを判定しよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

過程不要

a

2 個の物体の連成振動の固有モードについて, 正しいものすべてを選ぼう

1. 固有モードを時間の関数と見ると, 三角関数で表せる
2. 固有モードを 2 次元ベクトルとしてみると, つねに同じ方向を向いている
3. 固有モードの周波数は時間とともにだんだん減少していく
4. 固有モードの振幅は時間とともに増加, 減少を繰り返す
5. 各固有モードは, それぞれ, ただ 1 つの固有周波数を持つ

b

物体の x 軸上の運動で, 力が $F(x)$ のように座標 x の関数でかける場合 (=保存力である場合=みんながいちばんふつうだと思っている場合) を考える. 正しいものすべてを選ぼう. ただし力 $F(x)$ の平衡点で, 1 階微分がゼロではない場合 (=みんなが普通だと思っている場合) を考える.

1. どのような初期条件でも, 時間が十分経過した後, 物体はいずれかの平衡点で静止する
2. どのような初期条件でも, 時間が十分経過した後, 物体はいずれかの平衡点の近くで往復運動を行う
3. $F'(x_0) > 0$ であるような平衡点 x_0 を考える. 点 x_0 からすこしずれた点に物体を静かに置くという初期条件のもとでは, 微小振動が起こる
4. $F'(x_0) < 0$ であるような平衡点 x_0 を考える. 点 x_0 からすこしずれた点に物体を静かに置くという初期条件のもとでは, 微小振動が起こる
5. 2 点間を往復する運動はすべて単振動である

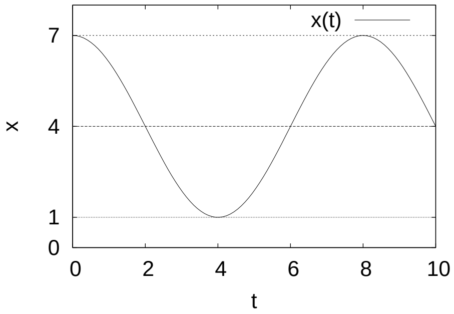
5

質量 $m = 8$ の物体が, x 軸上を, 力 $F(x) = -18x + 36$ を受けて運動する. 時刻 $t = 0$ に, 物体を位置 $x = 5$ において静かに手を放した. 時刻 $t = 0$ 以降の物体の運動を求めよう.

6

過程不要

次の単振動のグラフ (横軸 t, 縦軸 x) の式 $x(t)$ を書き (正しい式は一通りではないが, 整理されたものをひとつ答えればよい), 単振動の振幅, 周波数, 周期を求めよう.

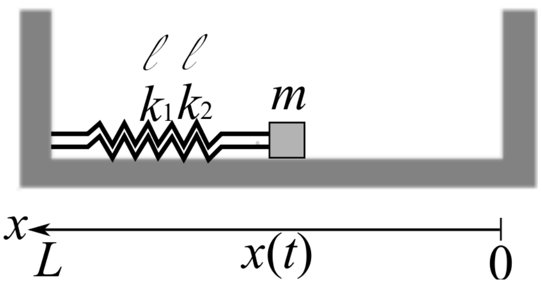


7

過程不要

質量 m の物体に, 自然長 ℓ, ばね定数 k_1, k_2 の 2 つのばねをとりつけ, 図のように, 間隔 L の壁の間に設置した ($L > \ell$). 壁の位置を原点とする左向きの x 軸をとる. 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とする.

1. 時刻 t におけるばね k_1 の長さを答えよう.
2. 時刻 t におけるばね k_1 ののび (のびたときが正) を答えよう.
3. 運動方程式を書こう.

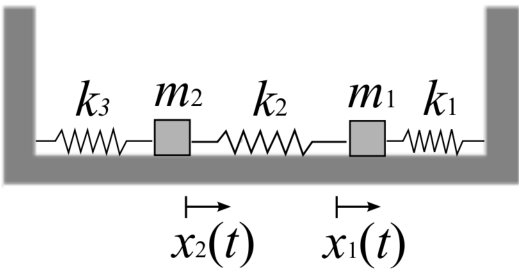


8

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

質量 m_1, m_2 の 2 つの物体が, 図のようにばね定数 k_1, k_2, k_3 のばねに接続されている. $x_1(t), x_2(t)$ は図の向きにはかった時刻 t における変位 (平衡点から符号つきのずれ) である.

1. 時刻 t におけるばね k_1 ののび (のびたときが正) を答えよう.
2. 時刻 t におけるばね k_2 ののび (のびたときが正) を答えよう.
3. x_1, x_2 についての運動方程式を書こう.



9

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -43x_1(t) + 30x_2(t) \\ x_2''(t) &= +10x_1(t) - 48x_2(t) \end{aligned}$$

を考える.

2 つの基準座標は, $X_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t), X_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$ で与えられることがわかっている.

初期条件 $x_1(0) = 9, x_2(0) = -6, x_1'(0) = 0 = x_2'(0) = 0$ を満たす解を求めよう.

10

単振動する物体の時刻 t における位置が

$$x(t) = -2 + 2\cos(4t) + 2\sqrt{3}\sin(4t)$$

で与えられる.

$x(t)$ のグラフを, $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で描こう. 最終的な図だけでなく, 描くのに使った補助線を残そう. t, x 軸上に主な値を記そう.

現象の数学 B プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2011-11-15 Tue 更新: Time-stamp: "2011-12-06 Tue 09:51 JST hig"

配点 1-10 各 10 点. 計 100 点.

1

(過程略)
固有周波数は $\omega = \sqrt{5}, \sqrt{10}$.
固有モードは $\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1) = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{5}t - \theta_1)$, $\boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_2) = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{10}t - \theta_2)$.
一般解は $\boldsymbol{x}(t) = C_1 \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{5}t - \theta_1) + C_2 \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right) \cos(\sqrt{10}t - \theta_2)$.. C_i, θ_i は任意定数.

配点 固有周波数 2×2 点, 固有モード 2×2 点, 一般解 2 点.

講評 固有ベクトルの求め方が怪しい人がいたのは残念.

2

(過程略) 周波数 $\omega = \sqrt{3/2}$, 周期 $T = 2\pi/\sqrt{3/2}$.

配点 平衡点での微分係数 2 点, 周波数 5 点, 周期 3 点.

講評 運動方程式からどのように微小振動が導かれるかを理解していた人は $m = 2$ を見落とさなかったでしょう.

3

(過程略) 安定な平衡点 $x = 0, 4$. 不安定な平衡点 $x = 1$.

配点 平衡点の求め方 1 点, 平衡点の位置 2×3 点, 平衡点の安定性 1×3 点.

講評 正解率は高かったですが, 4b は必ずしもよくできていなかったのでどう考えるべきか.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

a

1,2,5.

b

4.

配点　正誤判定問題 10×1 点.

講評　a4 で, 変位は増減しますが振幅は一定です. b2 で, 最初から平衡点で静止している場合や, 等速直線運動は?

5

運動方程式

$$8x''(t) = -18(x(t) - 2)$$

を初期条件 $x(0) = 5, x'(0) = 0$ のもとで解く.
(過程略) $x(t) = 2 + 3\cos(\frac{3}{2}t)$.

配点　運動方程式 3 点, 非斉次方程式の特解 2 点, 一般解 3 点, 積分定数の決定 2 点.

講評　物理数学的な言い方の問題だけど, この科目で繰り返しやってる (中心のずれた) 単振動の問題でしょ. '公式' 的な理解じゃなく, 運動方程式を微分方程式として解ける人が正解率高いみたい.

6

例えば, $x(t) = 4 + 3\cos(\frac{1}{4}\pi t)$.
振幅 3, 周波数 $\frac{1}{4}\pi$, 周期 8.

配点　式 5 点 (中心 2 点, 振幅 1 点, 位相 1 点, 周波数 1 点), 振幅 1 点, 周波数 2 点, 周期 2 点.

講評　周波数, 周期を読み取るのは重要.

7

1. $L - x(t)$
2. $L - x(t) - \ell$
3. $mx''(t) = +k_1(L - x(t) - \ell) + k_2(L - x(t) - \ell)$.

配点　1,2:各 2 点, 3:6 点.

8

1. $-x_1(t)$
2. $x_1(t) - x_2(t)$
3.

$$\begin{aligned} m_1 x_1''(t) &= -k_1 x_1(t) - k_2(x_1(t) - x_2(t)), \\ m_2 x_2''(t) &= \qquad\qquad +k_2(x_1(t) - x_2(t)) - k_3 x_2(t) \end{aligned}$$

配点　1,2:各 2 点, 3:6 点.

9

　運動方程式を (1),(2) とする. $2(1) + 3(2), (1) - 2(2)$ で基準座標 X_1, X_2 について微分方程式を作ると,

$$X_1''(t) = -28X_1(t), \quad X_2''(t) = -63X_2(t)$$

(過程略)

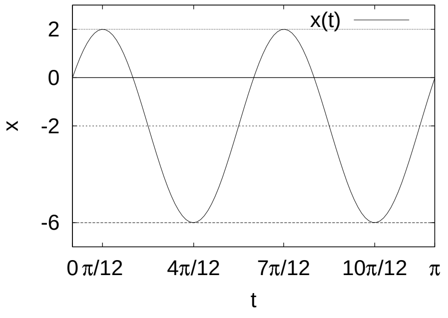
$$x_1(t) = 9\cos(3\sqrt{7}t), \quad x_2(t) = -6\cos(3\sqrt{7}t).$$

配点　基準座標の運動方程式 2×2 点, 一般解 4 点, 積分定数の決定 2 点.

講評　基準座標が与えてあるんだから, その運動方程式を導くのは簡単でしょ. 基準座標を利用する解法のところではこういう経路を通ったはず.
　せっかく計算量削減のために基準座標を与えてあるのに, 見ないふりして白紙から固有方程式から固有振動数と基準座標を求め直そうとしてる人も多かった (それで正解した人はそれはそれで尊敬するけど).

10

三角関数の合成により $x(t) = -2 + 4\cos(4t - \frac{1}{3}\pi)$. 振動の中心 -2, 振幅 4, 周波数 4, 周期 $\pi/2$ (よって, $[0, \pi)$ には山と谷が 2 つずつある). $x(0) = x(\pi) = -2 + 2, x'(0) = x'(\pi) = 2\sqrt{3} \times 4$ などにも注意.



配点　三角関数の合成 3 点 (振幅 1 点, 位相 2 点), グラフ 7 点 (中心 1 点, 振幅 2 点, 周波数 2 点, 位相 2 点).

講評　合成した式は瞬殺で出せるようになろうよ〜横方向には, $\cos(4(t - \frac{1}{12}\pi))$ だから,t 方向に $1/4$ 倍した後 t の正の方向に $\frac{1}{12}\pi$ 平行移動すればいいんだけど, $x(0), x'(0)$ は合成前の式に代入するだけですぐわかるので, $x = 0$ のあたりはこれを使って正確に描ける.