現象の数学 B ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2012-01-31 Tue 更新: Time-stamp: "2012-02-04 Sat 01:59 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分
2. 指定された用紙に解答しよう.
3. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -2x_1(t) - 2x_2(t), \\ x_2''(t) &= \ \ -x_1(t) - 3x_2(t) \end{aligned}$$

について, 2 つの基準座標を求めよう. (微分方程式の解は求めなくていい)

2

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -4x_1(t) + 3x_2(t), \\ x_2''(t) &= \quad\ x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned}$$

を考える. 一般解を求めよう.

ただし, 行列 $\begin{pmatrix} +4 & -3 \\ -1 & +2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使っていい.

3

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'' &= -2x_1 + x_2, \\ x_2'' &= \quad x_1 - 4x_2 + x_3, \\ x_3'' &= \qquad\quad + x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

を考える. すべての固有周波数と, そのうち 2 番目に小さい固有周波数に対応する固有モードを求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

4

関数 $x(t) = -\cos(5t) - \cos(7t)$ のグラフを，横軸 t 縦軸 x で，$0 \le t \le \pi$ の範囲で描こう．

最終的な図だけでなく，描くのに使った補助線や包絡線を残そう．振幅や速い振動遅い振動の周期がわかるように，t, x 軸上に主な値を記そう．

5

5.1

過程不要

波動 (長さ L の弦の振動) を考え，位置 x, 時刻 t の変位を $u(x,t)$ とする．次の説明のうち，正しいものの番号をすべて挙げよう．

1. 弦の形で，周囲の点よりもでっぱったりへっこんだりしている点には，元にもどってまっすぐになろうとする力がはたらく
2. 弦のすべての点にはいつでも，変位ゼロ ($u(x,t) = 0$) にもどそうとする力がはたらく
3. 形を変えずに，時間とともに x 方向にそのまま移動していくような波動がある
4. 1 個の弦でも，形を変えずに移動していく，いろいろな速さの波動がある
5. $\frac{u(0.5L,t)}{u(0.1L,t)}$ が t によらない定数であるような解がある (ただし分母が 0 になる時刻 t は考えない)

5.2

過程不要

N 物体の連成振動および波動 (弦の振動) について，正しいものの番号をすべて挙げよう．

1. N 物体の連成振動，波動とも，無限個の固有モードが存在する
2. 波動の固有モードでは，波数と固有周波数は正比例する
3. N 物体の連成振動の固有モードでは，波数と固有周波数は正比例する
4. 波動の固有モードで，節 ($u(x,t) = 0$ となる x) の個数が多いほど，時間的振動は速い
5. N 物体の振動の固有モードでは，隣り合う物体を順に見たときの空間的振動がゆっくりであるほど，時間的振動は速い

6

$\boxed{\text{過程不要}}$
$N=7$ 物体の連成振動をあらわす微分方程式

$$mx_i'' = +kx_{i-1} - 2kx_i + kx_{i+1} \quad (i=1,2,\ldots,7)$$

を考える．k, m は定数，x_i は変位．ただし，$x_0 = x_8 = 0$，すなわち両端のばねは壁に固定されているとする．

4 番目に大きい固有周波数と，固有モードを求めよう．ただし，N 物体の連成振動の固有周波数，固有モード，分散関係などの公式を使ってよい．

7

関数 $u(x,t) = A\sin\frac{\pi}{L}x\cos(\frac{\pi v}{L}t - \theta)$ を考える．ここで，L, v は与えられた定数，A, θ は定めるべき未知定数である．

$u(\frac{1}{2}L, 0) = 1$，$\frac{\partial u}{\partial t}(\frac{1}{2}L, 0) = -\frac{\sqrt{3}\pi v}{L}$ を満たすように A, θ を定めよう．

8

関数 $u(x,t)$ は，時刻 t，位置 $0 \le x \le L$ の弦の変位を表す．関数 $u(x,t)$ は波動方程式と固定境界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を満たす．

初期条件 $u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin(\frac{3\pi}{L}x)$ を満たす解を求めよう．

フーリエ級数変換を利用しないで，霊感解法で直観的にやっていい．

9

関数 $u(x,t)$ は，時刻 t，位置 $0 \le x \le L$ の弦の変位を表す．関数 $u(x,t)$ は波動方程式と固定境界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を満たす．

初期条件 $u(x,0) = 1 - \cos\frac{4\pi}{L}x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ を満たす解がフーリエ級数により

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin\frac{\ell\pi}{L}x\left[A_\ell\cos\frac{\ell\pi v}{L}t + B_\ell\sin\frac{\ell\pi v}{L}t\right]$$

と書けるとき，A_1 を求めよう ($A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ は求めなくてよい)．

三角関数の積和公式 $\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$ を導出なしに利用してもよい．

10

$\boxed{\text{過程不要}}$

$u(x,t) = -f(x+2t) + f(x-2t)$, ただし

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z < -2) \\ 4+2z & (-2 \leq z < 0) \\ 4-2z & (0 \leq z < 2) \\ 0 & (2 \leq z) \end{cases}$$

とする

1. $t = -\frac{3}{2}$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
2. $t = +\frac{1}{2}$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.

現象の数学 B ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2012-01-31 Tue 更新: Time-stamp: "2012-02-04 Sat 01:59 JST hig"

配点 1–10 各 10 点. 計 100 点.

1

行列 $K^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルから係数を読み取って, $X_1 = x_1 - x_2, X_2 = x_1 + 2x_2$.

配点 転置行列 2 点, 固有値 2 点, 固有ベクトル 2 点, 基準座標の作り方 2 点, 基準座標 2 点.

講評 基準座標と固有モードの区別がついてない人, 転置じゃない行列の固有ベクトルを使おうとした人がいたのは残念. また, 設問は '基準座標を利用して一般解を求める' ことを要求しているわけではないことに注意.

2

$$\begin{pmatrix} +4 & -3 \\ -1 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値は 5. 同様にもう一方は 1. よって, 固有周波数は $\omega = 1, \sqrt{5}$.

固有モードは $\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta_1)$, $\quad \boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t - \theta_2)$.

一般解は $\boldsymbol{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta_1) + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{5}t - \theta_2)$. ($C_i, \theta_i$ は任意定数).

配点 固有値 2 点, 固有モード 4 点, 一般解 4 点.

講評 一般解, 固有モード ($\boldsymbol{g}^{(1)}, \boldsymbol{g}^{(2)}$), 物体の座標 x_1, x_2 が区別できてない人がいたのは残念.

あらかじめ固有ベクトルがヒントとして書いてあるという意味でちょっと変化球な問. ヒントを無視して (or 検算だけに使って) 得意技だけで正解した人もいたけど, 固有値を簡単に求めるところに使ってほしかった.

基準座標を使わせようとしていると誤解した人もいたみたい. 書いてあるのは K の固有ベクトルであって, K^{t} の固有ベクトルじゃない.

固有値を特性方程式から求めた後, どっちの固有値とどっちの (ヒントの) 固有ベクトルが対応するか, 検討 (の記述) が不十分な人もいました. 上の簡単に固有ベクトル求める方法なら対応を決める手間もいらないんだけどね.

---

[2]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

3×3 行列の固有値は (過程略), $\lambda = 2, 3\pm\sqrt{3}$. 固有周波数は小さい方から, $\omega = \sqrt{3-\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \sqrt{3+\sqrt{3}}$..

$\omega=\sqrt{2}$ に対応する固有モードは $\boldsymbol{g}^{(2)}(t,\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t-\theta_2)$.

配点　3×3 行列 2 点, 固有周波数 3 点, 固有ベクトル 3 点, 固有モード 2 点.

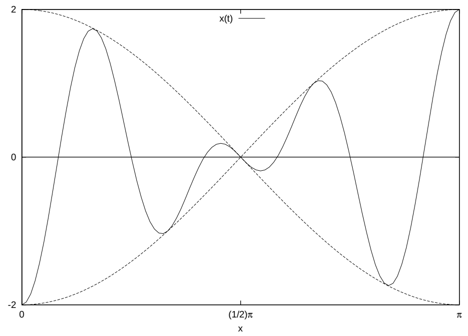
講評　行列の特性方程式の根を求めるのに, せっかく行列式の展開公式で共通因数 $(\lambda-2)$ があるのに展開しちゃうなんてもったいない.

固有値と固有周波数の違い (符号,2 乗) に注意.

N 物体の連成振動の固有周波数の公式 $2\sqrt{\sqrt{k}m}\sin\frac{\ell\pi}{2(N+1)}$ を使いたくなった人もいたみたいだけど, あの公式が使えるのって, 質量とばねがぜんぶ同じとき, つまり K が特定の形のとき, つまり右辺の係数が $+\frac{k}{m}, -2\frac{k}{m}, +\frac{k}{m}$ のときだけだよね.

4

和積公式より $x(t) = -2\cos(6t)\cos(t)$.



配点　式 1 点, うなりになってる 2 点, 遅い振動の包絡線の振幅, 周波数, 初期位相各 1 点, 速い振動の周波数 2 点, 初期位相 1 点, $x=\frac{1}{2}\pi$ の正から負に代わる様子 1 点.

講評　範囲 $0\le x\le\pi$ にペースを乱された人もいたかも. 一方, その指示を見落としたのか $0\le x\le 2\pi$ で描いた人もいましたが, それは半分消せばいいだけなので減点はしてません. 代入ですぐわかる $x(\pi)=-2$ を反映してない人多数.

5

5.1

1,3,5.

配点　真偽各 1 点 $\times 5$.

講評　2 $u(x,t)$ が x の 1 次関数の部分に力がはたらかないなど．3．進行波解の存在．4．波の速度は波動方程式の係数 $\pm v$．5．固有モードがその例.

5.2

2,4

配点　真偽各 1 点 $\times 5$.

講評　分散関係についての問題．4,5 は，波数が大きい，小さいのこと．

6

$N=7$ とするとき，ℓ 番目の固有モード $(\ell=1,2,3,4,5,6,7)$ は

$$\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t,\theta_\ell)=\begin{pmatrix}\sin(1p_\ell x)\\ \sin(2p_\ell x)\\ \vdots\\ \sin(7p_\ell x)\end{pmatrix}\cos(\omega_\ell t-\theta_\ell).$$

ここで，$p_\ell=\frac{\ell\pi}{7+1}$，分散関係から，固有周波数は

$$\omega_\ell=2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\sin\tfrac{\ell\pi}{2(7+1)}$$

で与えられる．したがって，4 番目に大きい固有周波数は，$\ell=4$ で，

$$p_4=\tfrac{1}{2}\pi$$

$$\omega_4=2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\sin\tfrac{\pi}{4}=2\sqrt{\tfrac{k}{m}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\tfrac{2k}{m}}.$$

固有モードは

$$\boldsymbol{g}^{(4)}(t,\theta_4)=\begin{pmatrix}+1\\0\\-1\\0\\+1\\0\\-1\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t-\theta_4\right).$$

配点　$\ell=4$，波数，固有周波数各 2 点．ベクトル部分が正しいこと 3 点．固有モード全体 1 点.

講評　いま $N=7$ なのに，$N=4,5$ の問題の解答をそのまま持ってくるのはどうかな～固有モードがベクトルになっていない人もいました.

7

条件は,

$$A\cos(-\theta) = 1, \quad -\frac{\pi v}{L}\sin(-\theta) = -\tfrac{\sqrt{3}\pi v}{L}.$$

よって, $A = 2, \theta = -\frac{1}{3}\pi$.

配点　A, θ の条件式各 2 点, 結果各 3 点.

講評　x を代入してしまえば, L12 ごろに説明した単振動の初期条件から任意定数を決める問題そのもの.

8

初期条件には $\ell = 3$ 固有モードだけが現れているので,

$$u(x,t) = Cg^{(3)}(x,t,\theta_3) = \sin\tfrac{3\pi}{L}x[A_3\cos\tfrac{3\pi v}{L}t + B_3\sin\tfrac{3\pi v}{L}t]$$

とおいて未知定数 A_3, B_3 を初期条件から決めると, $A_3 = 0, B_3 = -2\cdot\frac{L}{3\pi v}$. よって, 求める解は

$$u(x,t) = -2\cdot\tfrac{L}{3\pi v}\sin\tfrac{3\pi}{L}x\sin\tfrac{3\pi v}{L}t$$

.

配点　解を固有モードの線形結合においている 4 点, A 3 点, B 3 点.

講評　霊感で求めたときは, 条件を満たしてることを確かめれば数学的に正しい解答になります.

そういう意図の問題じゃないけどフーリエ級数変換でも楽にできます.

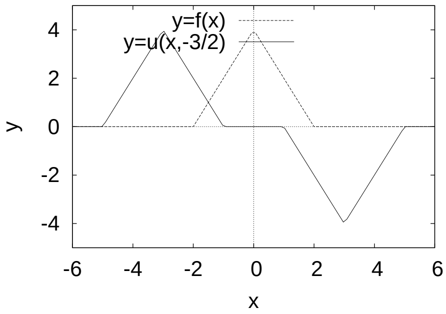
9

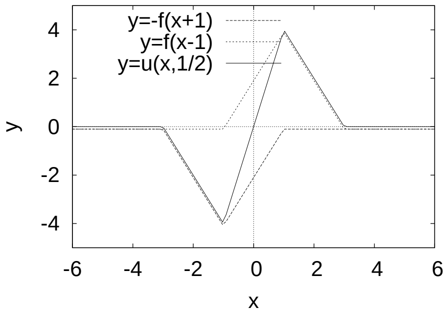
$A_1 = \int_0^L \sin\frac{1\pi}{L}x(1-\cos\frac{4\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \frac{32L}{15\pi}$

配点　A_1 が積分の形で書けてる 6 点, A_1 が求まってる 4 点.

講評　せっかく $m = 1$ って限定してるのに, 一般の m で場合分け ($m = \pm4$ を特別扱い) とかして計算するのはたいへんじゃない?

10





配点　1. f の形 1 点, x 方向の位置 2 点, y の値 2 点.
　2. x 方向の位置 1 点, y の値 1 点, ふたつの f を加えたときのつながり方 3 点.

講評　$+f$ でも $-f$ でも同じグラフになっちゃうってのはどうかな〜
　x 方向の平行移動の向きはちゃんとわかってるひとがおおくてうれしかった (y とセットで間違えると正解になっちゃうんだけど).