物体 1 個ばね n 個

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L02(2011-09-27 Tue)

今日の目標

1. 単振動の $x(t)$ のグラフを描けるようになろう
2. 物体 1 個ばね n 個のときに運動方程式を立てられるようになろう
3. 平衡点=力のつりあう点を見つけられるようになろう

http://hig3.net

プレテスト講評

- 1,2,3,4 各 25 点, 計 100 点.
- 1,2 は復習問題, 3,4 はこのコース (の前半) でできるようになる問題.
- 最初の計画: 25+25+0+0 点の人を 100 点にもっていく
- 平均点: 11,11,1,1
- 修正された計画: 25-50 点の人を 75-100 点にもっていく
- 再履修で点が悪かった人は自己省察しよう
- やってよかった

講評 1 25 点の人がけっこういた

講評 2 数式より日本語が大事. 何を求めろって?

講評 3 $x+y=3, x-y=2$ のとき, $x=3-y, y=x-2$ って答になってる?

講評 4 n 個の物体があるときの運動方程式は n 個ある (力学)

- 本来 3 年生がだれでもとれる科目. あきらめたり甘く見たりせずに勉強しよう.

Quiz: 微分方程式 $x'' = -9(x-4)$ で, 初期条件 $x(0) = 3$, $x'(0) = 3\sqrt{3}$ のとき, 解を求めてグラフを描こう.
略解 斉次方程式 $x'' = -9x$ の一般解は $x(t) = C\cos(3t) + D\sin(3t)$.
非斉次方程式の特解として $x(t) = 4$ がある.
よって一般解は $x(t) = C\cos(3t) + D\sin(3t) + 4$.
初期条件を満たす解は $x(t) = -\cos 3t + \sqrt{3}\sin 3t + 4$.

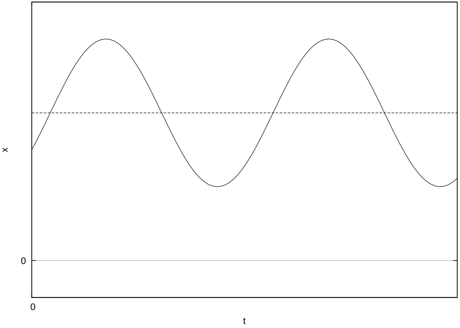
この $x(t)$ のグラフを描こう!

$$\begin{aligned} x(t) =& \underbrace{C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)}_{\text{斉次方程式の一般解}} + \underbrace{\ell}_{\text{非斉次方程式の特解}} \\ =& \sqrt{C^2+D^2}\left(\cos\omega t\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}} + \sin\omega t\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}\right) + \ell \quad \text{(加法定理)} \\ =& A\cos(\omega t - \theta) + \ell \end{aligned}$$

θ は, $\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}, \sin\theta = \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}$ となるような $\theta \in \mathbb{R}$ を選んだ.

今の場合, $x(t) = -\cos 3t + \sqrt{3}\sin 3t + 4 = \boxed{}$

- $A > 0$ 振幅
- ω 周波数
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 周期
- $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 振動数

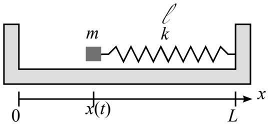


- $\omega t - \theta$ 位相
- $-\theta$ 初期位相

プレテスト returns

ばねの復元力 (フックの法則)

- 力の大きさ $=k \times |$のび$|$.
- 力の向き= $\boxed{}$



運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{}$$

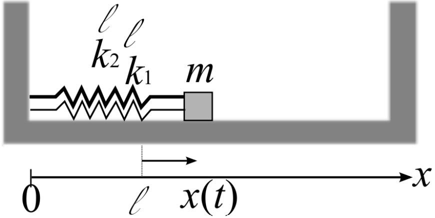
復習 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$ の一般解は, $x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta)$. ($A, \theta$ は積分定数)

周波数 $\omega = \sqrt{k/m}$

ばね定数 k が大きいほど $\boxed{}$ 振動する. 周期は $\boxed{}$

ばね 2 個並列

簡単のために自然長 ℓ は共通としよう.



$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{}$$

問題 (ばねの並列つなぎ)

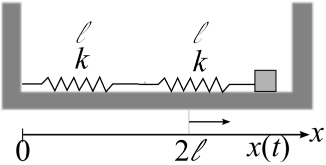
最初はばね (ばね定数 k 自然長 ℓ) 1 本だった. 同じばねをもう 1 本重ねて追加すると, 周波数は何倍になる?

1. 2 倍
2. $\sqrt{2}$ 倍
3. 1 倍
4. $1/\sqrt{2}$ 倍
5. $1/2$ 倍

寄り道: 同じばね 2 個直列

物
理のりでないとちょっと説明しずらい…

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boxed{}$$



なぜ?

問題 (ばねの直列つなぎ)

最初はばね (ばね定数 k 自然長 ℓ) 1 本だった. その先に同じばねをもう 1 本つないで延長すると, 周期は何倍になる?

1. 2 倍
2. $\sqrt{2}$ 倍
3. 1 倍
4. $1/\sqrt{2}$ 倍
5. $1/2$ 倍

超古代文明 ‘物理実験’ では知られていた!

ばね定数 k, 断面積 S, 長さ ℓ の関係

$$k = E \times \frac{S}{\ell}$$

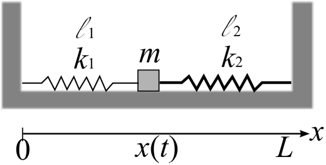
E: ばねの形や大きさによらず材質だけで決まる比例定数 ‘Young 率’.

- 並列にばねを増やすのは, 面積を和にすることに相当. $E \times \frac{(S_1+S_2)}{\ell}$.
- 直列にばねを増やすのは, 長さを和にすることに相当. $E \times \frac{S}{\ell_1+\ell_2}$.

フックの法則の別の形 $\sigma = E\epsilon \rightsquigarrow$ 復元力 $F = -\sigma S = -\frac{ES}{\ell}(x-\ell)$.

- σ: 応力の大きさ=力の大きさ/面積
- E: Young 率
- ϵ: ひずみ $= \frac{\text{のび}}{\text{長さ}} = \frac{x-\ell}{\ell}$ 物体が伸縮の比率

両側にばね



寄り道の前を思い出そう

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{}.$$

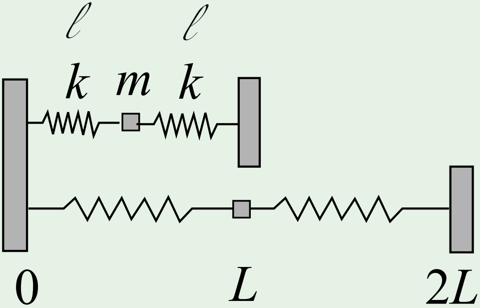
問題 (ばねを両側)

最初はばね (ばね定数 k 自然長 ℓ) 1 本だった. 反対側に同じばねをつけると, 周波数は何倍になる?

1. 2 倍
2. $\sqrt{2}$ 倍
3. 1 倍
4. $1/\sqrt{2}$ 倍
5. $1/2$ 倍

問題 (のばしたときの縦振動)

上 A の壁を引き離した下 B. どっちが速く振動する (=周期が短い)?



1. A が速い
2. B が速い
3. 同じ
4. B は単振動じゃない
5. B はばねが切れる

平衡点

平衡点

力 $F(x) = 0$ となる位置 $x = x_0$.

- 力 $F(x_0) = 0$ を解いて求められる.
- その点にそっと (=初速度 0 で) 置いたら, 物体はずっとその位置にとどまる.

今の場合: 平衡点 $\boxed{}$.

非斉次微分方程式の特解の見つけ方と平衡点の関係

$x''(t) = -ax(t) + b$ を解こう! $m \cdot (-ax + b)$ が力.

$$x''(t) + ax(t) = b$$

両辺から b を引いて $x''(t) + a(x - \frac{b}{a}) = 0$

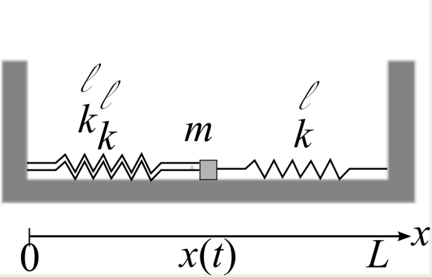
$X(t) = x(t) - \frac{b}{a}$ とおいて $X''(t) + aX(t) = 0$

解くと $X(t) = A\cos(\sqrt{a}t - \theta)$, つまり $x(t) = A\cos(\sqrt{a}t - \theta) + \frac{b}{a}$.
要するに, 平衡点 $x_0 = \frac{b}{a}$ を原点 $X = 0$ にとった座標 $X(t) = x(t) - \frac{b}{a}$ で考えてる.
座標の原点を平衡点にとると楽

問題 (ばね複数の振動)

図の状況で, k はばね定数, ℓ はばねの自然長, L は壁から壁までの距離.

1. 運動方程式を立てよう.
2. 平衡点を求めよう.
3. 振動の周期を求めよう.



連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.1–p.11

次回の予習ポイント

- テイラー展開 (微積分・演習 I)
- ポテンシャルエネルギー (物理数学 II, 力学, ベクトル解析)

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜