平衡点のまわりの微小振動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L03(2011-10-04 Tue)

今日の目標

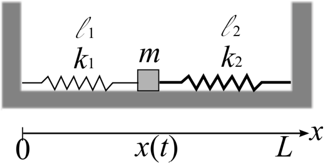
1. 平衡点=力のつりあう点を見つけられるようになろう
2. 平衡点のまわりの振動を単振動で近似して, その周期を求められるようになろう.

http://hig3.net

略解:

1. $mx'' = -2k(x-\ell) + k(L-x-\ell)$.
2. 右辺 $= F(x_0) = 0$ を解いて, $x_0 = \frac{1}{3}(\ell + L)$. これって, $2\ell = L$ だったら真ん中が平衡点だろうっていう直観とあってるじゃん.
3. $mx'' + 3kx = k(L+\ell)$ より, 一般解は $x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \theta) + \frac{1}{3}(\ell + L)$. ($A, \theta$ は任意定数). よって, 周波数 $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, 周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.

両側にばね



寄り道の前を思い出そう

$$mx'' = \boxed{}.$$

$$= \boxed{}$$

問題 (ばねを両側)

最初は物体はばね (ばね定数 k 自然長 ℓ) 1 本につながれていた. 物体の反対側にも同じばねをつけると, 周波数は何倍になる?

1. 2 倍
2. $\sqrt{2}$ 倍
3. 1 倍
4. $1/\sqrt{2}$ 倍
5. $1/2$ 倍

平衡点

平衡点

力 $F(x) = 0$ となる点 $x = x_0$ を平衡点という.

- 力 $F(x_0) = 0$ を解いて求められる.
- その点にそっと (=初速度 0 で) 置いたら, 物体はずっとその位置にとどまる.

今の場合: 平衡点は .

単振動の場合

$$mx'' = -a \cdot (x - x_0)$$

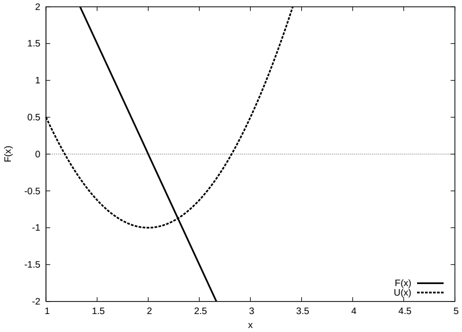
変数変換 $X = x - x_0$ すると運動方程式をたてるのも解くのも楽. 待て次週.

$$mX'' = -aX$$

ばねの力のもとでの振動

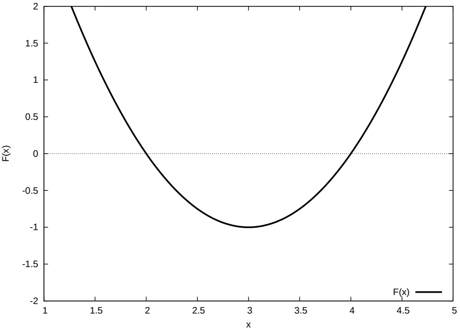
$$1 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -3x + 6$$

計算しなくても, 平衡点の近くで振動しそうなことはわかる
こういうのは安定な平衡点.



一般の力のもとでの微小振動

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = x^2 - 6x + 8$$



- 平衡点: $x^2 - 6x + 8 = 0$ を解いて, $\boxed{}$

問題 (微小振動:安定/不安定な平衡点)

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = x^2 - 6x + 8$$

で, 振動が起きそうなのはどこ?

1. $x = 2$ のまわり
2. $x = 3$ のまわり
3. $x = 4$ のまわり
4. $x = 2$ と $x = 4$ のまわり
5. 振動は起きない

- 振動しそうだけど単振動じゃない, 運動方程式が解けない.
- $\boxed{}$ は安定な平衡点, $\boxed{}$ は不安定な平衡点.

安定な平衡点・不安定な平衡点

x 軸上の運動, $F(x)$: 力, $mx'' = F(x)$.

定義

- $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0$ は平衡点
  - $F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ は不安定な平衡点
  - $F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ は安定な平衡点
  - $F'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ は安定か不安定かは場合による.

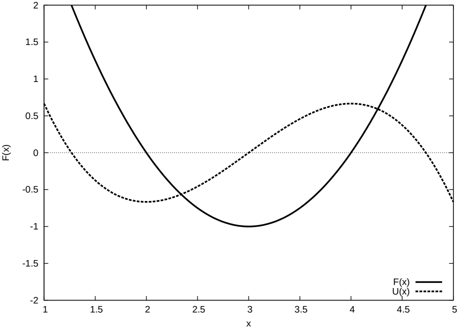
性質

- 平衡点にそっとおいた物体は, ずっと平衡点にとどまる.
- 安定な平衡点の近くでは物体は微小振動できる.
- 不安定な平衡点の近くに物体をそっとおくと, 平衡点から離れていく.

安定/不安定平衡点とポテンシャル

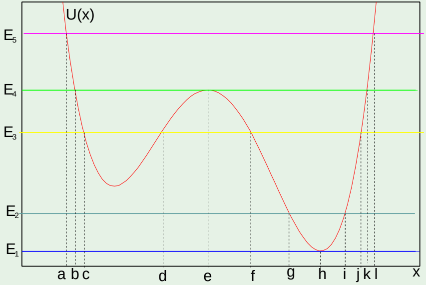
$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = F(x) = x^2 - 6x + 8$ より,

ポテンシャル $U(x) = \boxed{}$



問題 (ポテンシャルと微小振動)

図のポテンシャルのもとで運動する物体を考える. (単振動で近似できるような) 微小振動をするようなエネルギーの値は?



1. E_1 よりちょっと大きい
2. E_2 よりちょっと大きい
3. E_3 よりちょっと大きい
4. E_4 よりちょっと大きい
5. E_5 よりちょっと大きい

安定な平衡点の近くでの微小振動

簡単のため $m = 1$ とする.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = x^2 - 6x + 8$$

の安定な平衡点 $x = 2$ の近くでの様子を考えよう.
$F(x) = x^2 - 6x + 8$ を平衡点 $x = 2$ においてテイラー展開

近くの運動なら, ($|x - x_0|$ が小さければ), 2 次以上を無視していいかも.

単振動で近似できる. 周波数 $\omega = \sqrt{2}$.

微小振動

$mx'' = F(x)$ に従って運動するとき, 安定な平衡点 $x = x_0$ の近くの運動は, 単振動 $mx'' = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$ で近似できる.

問題 (微小振動の周期を求めよう!)

質量 $m = 1$ の質点の時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x) = \mathrm{e}^{-6x} - \mathrm{e}^{-2x}$ を受けて運動している.

1. 運動方程式を書こう.
2. 平衡点を (すべて) 見つけよう.
3. 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
4. 質点が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周期を求めよう.

問題 (微小振動:周期の比較)

A,B の 2 つの微分方程式を考える.

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -3(x-2) \qquad \text{(A)}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\left(x^2-3x+1\right) \qquad \text{(B)}$$

の安定な平衡点 $x=2$ のまわりの微小振動. 周期が長いのはどっち?

1. A
2. B
3. 同じ
4. B は単振動じゃないから比較できない
5. B には決まった周期はない

数理モデル II のりの平衡点と安定性

$x'' = F(x)$ の微小振動を数理モデル II のりで考えよう. 新しい変数 $y = x'$ をいれて 1 階落とす.

$$
\begin{aligned}
x' &= f_1(x, y) = y \\
y' &= f_2(x, y) = F(x)
\end{aligned}
$$

(x_0, y_0) が平衡点

$\Leftrightarrow \quad f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0, F(x_0) = 0$

(x_0, y_0) は中心 or 節点 or 鞍点, 安定 or 不安定?

$\Delta x = x - x_0, \Delta x = y - y_0$. $f_i(x, y)$ を $(x, y) = (x_0, y_0)$ において (2 変数)1 次のテイラー展開.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F'(x_0) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix}
$$

行列の固有値 $\lambda = \sqrt{F'(x_0)}$?

中心 $\Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$ が虚数 $\Leftrightarrow F'(x_0) < 0 \Leftrightarrow$ (今日の意味で) 安定

問題 (微小振動の周期を求めよう!)

質量 $m = 1$ の物体の, 時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では, 力 $F(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$ がはたらく. 物体の $-\pi < x < +\pi$ の範囲の運動を考える.

1. 平衡点を (すべて) 見つけよう.
2. 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
3. 物体が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周波数と周期を求めよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.12-14

- ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14)

次回の予習ポイント

- 重心座標, 相対座標 力学
- 2×2 行列の固有値固有ベクトル 線形代数

予習復習問題

明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜