連成振動と基準座標

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L04(2011-10-11 Tue)

今日の目標

1. 複数の物体が複数のばねでつながれているとき, 運動方程式がかけるようになろう
2. 単純な連成振動の運動方程式を, 基準座標の方法で解けるようになろう.

http://hig3.net

略解:

1. $x''(t) = \sqrt{3} - 2\cos x$.
2. $F(x) = \sqrt{3} - 2\cos x = 0$ を解いて，平衡点は $x = \pm\frac{1}{6}\pi$.
3. $F'(x) = +2\sin x$. $F'(+\frac{1}{6}\pi) = 1 > 0$, $F'(-\frac{1}{6}\pi) = -1 < 0$ より，安定な平衡点は $x = -\frac{1}{6}\pi$.
4. 安定な平衡点 $x = \frac{1}{6}\pi$ について考える. $F(x)$ を $x = \frac{1}{6}\pi$ においてテイラー展開すると，

$$(\sqrt{3} - 2\cos(-\tfrac{1}{6}\pi)) + 2\sin(-\tfrac{1}{6}\pi)(x + \tfrac{1}{6}\pi) + \cdots = -(x + \tfrac{1}{6}\pi) + \cdots$$

よって，$x = -\frac{1}{6}\pi$ の近くでの運動は

$$x''(t) = -(x(t) + \tfrac{1}{6}\pi)$$

で近似できる.

これは 1 階線形非斉次微分方程式

$$x'' + x = -\tfrac{1}{6}\pi.$$

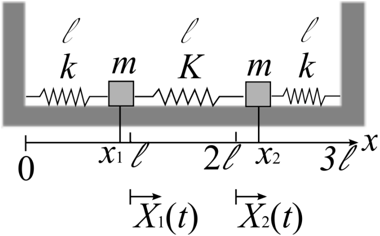
非斉次方程式の特解として, 定数解 $x(t) = -\frac{1}{6}\pi$ がある. よく考えると, $x(t) =$ 平衡点 はいつでも特解になる.
斉次方程式 $x'' = -x$ の一般解は $x(t) = A\cos(1 \cdot t - \theta)$
よって非斉次方程式の一般解は $x(t) = A\cos(1 \cdot t - \theta) - \frac{1}{6}\pi$.
別解: $X = x - (-\frac{1}{6}\pi)$ とおくと

$$X'' + X = 0.$$

これは単振動で, $X(t) = A\cos(1 \cdot t - \theta)$. よって解は,
$x(t) = X(t) - \frac{1}{6}\pi = A\cos(1 \cdot t - \theta) - \frac{1}{6}\pi$.
単振動の周波数は $\omega = 1$, 周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$.

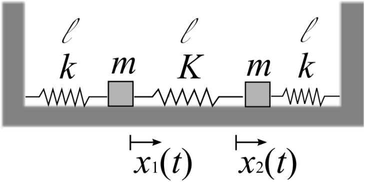
連成振動の運動方程式

$$mx_1'' = -k(x_1 - \ell) + K(x_2 - x_1 - \ell)$$
$$mx_2'' = -K(x_2 - x_1 - \ell) + k(3\ell - x_2 - \ell)$$



平衡点:

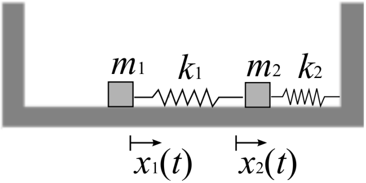
平衡点からの変位 $X_1 = x_1 - \ell, X_2 = x_2 - 2\ell.$



右辺に定数項がないのは自然.
だっ
て
以後
は, 変位 X_1, X_2 を小文字 x_1, x_2 とかく.
変位についての, こ
の運動方程式がいきなり書けるように.

問題 (連成振動の運動方程式)

図の場合に運動方程式をたてよう. x_1, x_2 は平衡点からの変位.



問題 (連成振動の運動方程式)

各物体の平衡点からの変位 x_i を変数としたとき, 連成振動の運動方程式について, 間違っているものの番号を (何個でも) 答えよう.

1. 方程式の個数と変位の個数は同じ
2. 方程式の個数と物体の個数は同じ
3. 方程式の個数とばねの個数は同じ
4. 平衡点は $x_i = 0$
5. 平衡点は $x_i =$ 自然長

基準座標 (特別に簡単な場合)

最初にもどって, これは特別な場合で, x_1, x_2 が対称的 (入れ替え可能)
$(1)+(2), (1)-(2)$ を作ってみよう.

$$m(x_1+x_2)'' = -k(x_1+x_2)$$
$$m(x_1-x_2)'' = -(k+2K)(x_1-x_2)$$

ここで, $\boxed{}$ とおく.

$$mX'' = -\ kX$$
$$mY'' = -\ (k+2K)Y$$

(連立) 運動方程式は X, Y に分離された. X, Y それぞれ単振動する.

基準座標

この X, Y のように, 座標 x_1, x_2 の 1 次式で, 分離されていて各々が単振動するものを基準座標という ($x_1 \pm x_2$ とはかぎらない).

$mX'' = -kX$ を解いて

$$X(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right).$$

$mY'' = -(k+2K)Y$ を解いて

$$Y(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right).$$

ここで, 任意定数 $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は一般には $A_1 \neq A_2, \theta_1 \neq \theta_2$ であることに注意.

X, Y を x_1, x_2 について逆に解くと,

よって,

$$\begin{aligned} x_1(t) =& \frac{1}{2}A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right) + \frac{1}{2}A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right) \\ x_2(t) =& \frac{1}{2}A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right) - \frac{1}{2}A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right) \end{aligned}$$

任意定数を rename して

$$
\begin{aligned}
x_1 =& C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right) \\
x_2 =& C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \theta_1\right) - C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2K}{m}}t - \theta_2\right)
\end{aligned}
$$

大注意

もちろん $C_1, C_2, C_3, C_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ などとしてはいけない.
$C_1 = C_2$, $\theta_1 = \theta_2$ としてもいけない.
だって初期条件は 2 個の物体
の $\boxed{}$ =自由度の数はどんな変数
の置き方をしても変わらない.

問題 (連成振動と基準座標)

連成振動の運動方程式

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -3x_1 - 2x_2 \\
x_2'' &= -2x_1 - 3x_2
\end{aligned}
$$

を, 基準座標を用いて, 初期条件 $x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1'(0) = x_2'(0) = 3$ のもとで解こう.

基準座標 (普通の場合)

問題 (連成振動と基準座標)

$$\begin{aligned} x_1'' &= -\, x_1 - 4(x_1 - 2x_2) \\ x_2'' &= +\, 2(x_1 - 2x_2) - x_2 \end{aligned}$$

のときに, 霊感で基準座標 $a_1x_1 + a_2x_2$ をみつけて, 運動方程式を分離しよう.

霊感のない人のための方法

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}$$

と書こう. $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, K は 2×2 行列 $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

なぜ $-K$? $\boxed{}$

$X = ax_1 + a_2x_2$ が基準座標になってるとする.

基準座標って? $\boxed{}$

$$[a_1x_1 + a_2x_2]'' = (a_1 \quad a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' \underbrace{=}_{\text{運動方程式}} -(a_1 \quad a_2) K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

右辺が

$$-\text{定数} \times [a_1x_1 + a_2x_2] = \boxed{}$$

にならないといけない. 定数を λ とおく.

$$(a_1 \quad a_2)K = \lambda \times (a_1 \quad a_2)$$

両辺の転置行列をとって, (復習:行列では ☐)

$$K^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

転置行列 K^{t} の固有値を λ, 固有ベクトルを $\binom{a_1}{a_2}$ とすると, 基準座標は $X = a_1 x_1 + a_2 x_2$ で,

$$X'' = -\lambda X$$

という方程式が導かれる. ☐

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{i\sqrt{\lambda}\,t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,t}$$

固有値は 2 個 λ_1, λ_2. 固有ベクトル, したがって基準座標は 2 個出てくるはず.

問題

さっきの問で転置行列 K^{t} の固有値と固有ベクトルを求めよう．それを利用して基準座標を作ろう．

基準座標の方法のまとめ

1. 基準座標を 2 個見つける.
    1. 霊感で
    2. 霊感がきかなかったら, K の転置 K^{t} の固有ベクトルを求めたらそれが係数.
2. 2 個の基準座標について運動方程式を導く
    - $X'' = -\lambda X$ となるはず.
    - λ は K^{t} の固有値
3. 2 個の基準座標の運動方程式を解く.
    - 単振動になるはず. 周波数 $\sqrt{\lambda}$.
4. もとの座標にもどす.

初期条件は, x, X の便利な方に適用.

問題 (連成振動の基準座標)

連成振動の基準座標について, 間違っているものの番号を (何個でも) 答えよう.

1. 物体と同じ個数だけある
2. 変位の 1 次式
3. いつでも $x_1 \pm x_2$
4. 行列の固有ベクトルから求められる
5. ばねと同じ個数だけある
6. 単振動の運動方程式に従う

問題 (連成振動と基準座標)

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -6x_1 - 4x_2 \\
x_2'' &= -x_1 - 6x_2
\end{aligned}
$$

のときに, 霊感または線形代数の魔法で基準座標 $a_1x_1 + a_2x_2$ をみつけて, 運動方程式を分離しよう.

連絡

小形 p.18-32

- 基準座標 小形 2 章演習問題 [4](p.38),
- 基準座標 小形 2 章演習問題 [8](p.38),

今週はスペシャルな予習復習問題!

今週の予習復習問題はのりが違います!

- 3 ピーナッツ
- 今日の quiz の記名答案をシャッフルして e ラーニングシステムからダウンロードできるようにする (水曜昼以降) ので, それを赤ペンで添削してください.
- 略解はない状態でやってもらいます
- 添削後の答案をスキャンして PDF にして, e ラーニングシステムから, 2011-10-20 木 23:59 までにアップロードしてください.
- スキャンのしかた `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`
- 添削者の名前は書かないでください. 解答者には伝えません. 樋口のみに伝わります.
- 2011-10-26 水まで, 普通の予習復習問題 (e ラーニングシステムの小テスト) はありません.

予習復習問題の趣旨と評価ポイント

- ~~樋口が添削をさぼりたい~~.
- 教員志望の人も多いんだから, ‘レポートの添削’ を体験しよう!
- もちろん, 図書館やネットをサーチして似た問題の解答を発見して, 答案はさわらないでその後ろに赤ペンで丸写しすることもできるわけだけど, それって解答者にはあまり参考にならないでしょ. ここでは, 解答の間違い方に応じて, 適切な訂正とアドバイスを与えることを目的とします.
- 途中で終わっちゃってる答案に対しては, 最後のゴールまで書いてあげる必要はありません. そこまでの誤りを指摘し, その次にどちら方向に行けばいいかをアドバイスしてあげましょう.
- もとの答案を解答者の quiz として, 添削を添削者の予習復習問題として
    - 間違いを見逃してない
    - 正しい訂正をしている
    - 教育的に親切

  という観点から評価します.