一般の基準座標の求め方

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L05(2011-10-25 Tue)

今日の目標

1. 一般の連成振動の運動方程式を, $x_1 \pm x_2$ と限らない基準座標の方法で解けるようになろう.

http://hig3.net

略解:

基準座標 $X = x_1 + x_2, Y = x_1 - x_2$ をとると,

$$X'' = -5X, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = 6.$$
$$Y'' = -Y, \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0.$$

それぞれ一般解を求めると,

$$X(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{5}\,t - \theta_1\right), \quad Y(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{1}\,t - \theta_2\right)$$

ここで A_i, θ_i は任意定数. これらを初期条件から定めると,

$$A_1 = 6/\sqrt{5}, \theta_1 = \pi/2, A_2 = 0, \theta_2 = \text{任意}$$

これらは, 一般角や, $A_1 = -6/\sqrt{5}$ と取る可能性など, 一意ではない. しかし, 代入した関数 X, Y は一意で,

$$X(t) = \frac{6}{\sqrt{5}} \sin\left(\sqrt{5}\,t\right), \quad Y(t) = 0.$$

よって

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin\left(\sqrt{5}\, t\right).$$

別解: なお, x_1, x_2 の一般解

$$\begin{aligned} x_1(t) =& C_1 \cos\left(\sqrt{5}\, t - \theta_1\right) + C_2 \cos(t - \theta_2), \\ x_2(t) =& C_1 \cos\left(\sqrt{5}\, t - \theta_1\right) - C_2 \cos(t - \theta_2) \end{aligned}$$

を求めてから初期条件を課して C_i, θ_i を定めるという手順でも同じ結果を得る.

別解': 別解で加法定理を使って,

$$\begin{aligned} x_1(t) =& D_1 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{5}\, t\right) + E_1 \cos(t) + E_2 \sin(t) \\ x_2(t) =& D_1 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{5}\, t\right) - E_1 \cos(t) - E_2 \sin(t) \end{aligned}$$

として, D_i, E_i を定めるという手順でも同じ結果を得る.

基準座標 (一般の場合)

問題 (連成振動と基準座標)

$$x_1'' = -x_1 - 4(x_1 - 2x_2)$$
$$x_2'' = +2(x_1 - 2x_2) - x_2$$

のときに, 霊感で基準座標 $a_1x_1 + a_2x_2$ をみつけて, 運動方程式を分離しよう.

霊感のない人のための方法

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}$$

と書こう. $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, K は 2×2 行列 $\boxed{}$.

$X = a_1 x_1 + a_2 x_2$ が基準座標になってるとする.

基準座標って? $\boxed{}$

$$X'' = [a_1 x_1 + a_2 x_2]'' = (a_1 \quad a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' \underbrace{=}_{\text{運動方程式}} -(a_1 \quad a_2) K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

右辺が

$$-\text{定数} \times X = \boxed{}$$

にならないといけない. 定数を λ とおく.

$$(a_1 \quad a_2)K = \lambda \times (a_1 \quad a_2)$$

両辺の転置行列をとって, (復習:行列では $\boxed{}$)

$$K^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

転置行列 K^{t} の固有値を λ, 固有ベクトルを $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$ とすると, 基準座標は $X = a_1x_1 + a_2x_2$ で与えられ,

$$X'' = -\lambda X$$

という方程式が導かれる. $\lambda > 0$ なら $\boxed{}$

$$X(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, t - \theta)$$

固有値 2 個 λ_1, λ_2. 固有ベクトル (すなわち基準座標) も 2 個であるはず.

$$X(t) = X_1(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = A_1\cos(\sqrt{\lambda_1}\, t - \theta_1)$$

$$Y(t) = X_2(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = A_2\cos(\sqrt{\lambda_2}\, t - \theta_2)$$

問題 (固有値固有ベクトル)

M の固有値固有ベクトルについて, うそはどれ?

1. $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ と対角化したときの λ_1, λ_2 が M の固有値である.
2. 2×2 行列の固有値はふつう 2 つある.
3. $\det M$ を計算すると M の固有値もわかる.
4. 固有方程式 $\det(M - \lambda I) = 0$ の 2 根 λ は M の固有値である.
5. 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は, 求めた固有値 λ に対して, $M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ を解くと求まる
6. 固有ベクトルの (0 倍を除く) 定数倍もまた固有ベクトルである

問題

さっきの問で転置行列 K^{t} の固有値と固有ベクトルを求めよう. それを利用して 2 個の基準座標を作ろう.

基準座標の方法のまとめ

1. 基準座標を 2 個見つける.
   1. 霊感で
   2. 霊感がきかなかったら, K の転置 K^{t} の固有ベクトルを求めたらそれが係数.
2. 2 個の基準座標について運動方程式を導く
   - $X'' = -\lambda X$ となるはず.
   - λ は K^{t} の固有値
3. 2 個の基準座標の運動方程式を解く.
   - 単振動になるはず. 周波数 $\sqrt{\lambda}$.
4. もとの座標にもどす.

初期条件は, x, X の便利な方に適用.

こんな見方

もとの変位 x_i
方程式は複雑 (結合)

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -k_{11}x_1 - k_{12}x_2 \\
x_2'' &= -k_{21}x_1 - k_{22}x_2
\end{aligned}
$$

解も複雑

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 u_{11}\cos(\sqrt{\lambda_1}\,t-\theta_1) + C_2 u_{21}\cos(\sqrt{\lambda_2}\,t-\theta_2) \\
x_2 &= C_1 u_{12}\cos(\sqrt{\lambda_1}\,t-\theta_1) + C_2 u_{22}\cos(\sqrt{\lambda_2}\,t-\theta_2)
\end{aligned}
$$

基準座標 X_i
方程式は単純

$$
\begin{aligned}
X_1'' &= -\lambda_1 X_1 \\
X_2'' &= \qquad\quad -\lambda_2 X_2
\end{aligned}
$$

解も単純

$$
\begin{aligned}
X_1 &= C_1\cos(\sqrt{\lambda_1}\,t-\theta_1) \\
X_2 &= \qquad\qquad\qquad\quad + C_2\cos(\sqrt{\lambda_2}\,t-\theta_2)
\end{aligned}
$$

問題 (連成振動の基準座標)

連成振動の基準座標について, 間違っているものの番号を (何個でも) 答えよう.

1. 物体と同じ個数だけある
2. 変位の 1 次式
3. いつでも $x_1 \pm x_2$
4. 行列の固有ベクトルから求められる
5. ばねと同じ個数だけある
6. 単振動の運動方程式に従う

問題 (連成振動と基準座標)

$$x_1'' = -6x_1 - 4x_2$$
$$x_2'' = -x_1 - 6x_2$$

のときに, 霊感または線形代数の魔法で基準座標 $a_1x_1 + a_2x_2$ をみつけて, 運動方程式を分離しよう.

問題 (連成振動)

連成振動を表す $x_1(t), x_2(t)$ についての微分方程式系

$$
\begin{aligned}
x_1'' &= -4x_1 + x_2 \\
x_2'' &= -2x_1 - 7x_2
\end{aligned}
$$

を考える. 基準座標を求め, 基準座標について解こう.
微分方程式系の, 初期条件 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 3, x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ を満たす解を求めよう.

連絡

小形 p.18-32

- 基準座標 小形 2 章演習問題 [4](p.38),
- 基準座標 小形 2 章演習問題 [8](p.38),

次回の予習ポイント

- もう一度 2×2 行列の固有値固有ベクトル　線形代数

予習復習問題　水曜日の昼から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね～

プチテストやります!

日時	2011-11-15 火 3, 90 分.
場所	いつもと同じ
配点	100 点が 30 ピーナッツ.
参照	なし.
公欠	基準と届が独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.
出題計画	未確定.