固有周波数と固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L06(2011-11-01 Tue)

今日の目標

1. 連成振動の固有周波数, 固有モードとは何か, 説明できるようになろう.
2. 連成振動の運動方程式が与えられたときに, 固有周波数, 固有モードを求められるようになろう.

http://hig3.net

略解:
微分方程式は

$$\boldsymbol{x}''(t) = -K\boldsymbol{x}(t), \quad K = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とかける.
K^{t} の固有値は, $\lambda = 4, 8$. 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とすると, 基準座標は $X_1(t) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{x}(t) = x_1(t) - 2x_2(t)$,
$X_2(t) = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{x}(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$ である.
与えられた微分方程式から $(1) - 2(2)$, $(1) + 2(2)$ を作ると, 微分方程式は分離され, $X_1''(t) = -4X_1(t)$, $X_2''(t) = -8X_2(t)$

略解: 微分方程式は次のようにかける.

$$\boldsymbol{x}''(t) = -K\boldsymbol{x}(t), \quad K = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

K^{t} の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ として, 基準座標 $X_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{x} = x_1 + x_2$, $X_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{x} = 2x_1 + x_2$ を考える.
与えられた微分方程式から (1)+(2), 2(1)+(2) を作ると, $X_1'' = -6X_1$, $X_2'' = -5X_2$ となり, これを解いて,
$X_1(t) = A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1), X_2(t) = A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2)$. よって

$$\begin{aligned} x_1(t) =& X_2(t) - X_1(t) = -A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1) + A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2) \\ x_2(t) =& 2X_1(t) - X_2(t) = 2A_1 \cos(\sqrt{6}t - \theta_1) - A_2 \cos(\sqrt{5}t - \theta_2) \end{aligned}$$

$A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数. これらを初期条件から定めると,

$$\begin{aligned} x_1(t) =& = -5 \cos(\sqrt{6}t) + 7 \cos(\sqrt{5}t) \\ x_2(t) =& = 10 \cos(\sqrt{6}t) - 7 \cos(\sqrt{5}t). \end{aligned}$$

先週の微分方程式の解をベクトルで書こう

先週の微分方程式を考える.

$$\boldsymbol{x}''(t) = -K\boldsymbol{x}(t), \quad K = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

K^{t} の固有値 $\lambda_1 = 1^2, \lambda_2 = 3^2$, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

$\rightsquigarrow$ $\boxed{}$ は

$$X_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) = C_1 \cos(t - \theta_1),$$
$$X_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) = C_2 \cos(3t - \theta_2).$$

よって,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(X_1(t) + X_2(t)) = \frac{1}{2}C_1 \cos(t - \theta_1) + \frac{1}{2}C_2 \cos(3t - \theta_2)$$
$$x_2(t) = \frac{1}{4}(X_1(t) - X_2(t)) = \frac{1}{4}C_1 \cos(t - \theta_1) - \frac{1}{4}C_2 \cos(3t - \theta_2).$$

ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を使うと

$$\boldsymbol{x}(t) = \boxed{}$$

と書く. $C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数. ベクトル $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

固有周波数と固有モードを求める方法

一般に,

$$\boldsymbol{x}''(t) = -K\boldsymbol{x}(t),$$

という方程式には, さっきの例と, 基準座標のやり方から,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{g}(t,\theta) = \boldsymbol{u}\cos(\omega t - \theta)$$

というタイプの解がありそう. θ は任意. $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right), \omega > 0$ は何か決まった数.

この解 $\boldsymbol{g}(t,\theta)$ (固有モードという) をもっと直接に楽に求めよう.

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}\cos(\omega t - \theta)$ を代入 ($\boldsymbol{u}, \omega$ は文字のままにしておくけど後で決める).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}''(t) &= -K\boldsymbol{x}(t) \\ -\omega^2\boldsymbol{u}\cos(\omega t - \theta) &= -K\boldsymbol{u}\cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

$$-\omega^2 \boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{u}$$

ω と $\boldsymbol{u}$ を決めたかったんだけど,

ω^2 は

$\boldsymbol{u}$ は

とわかった.

先週の例では, 2×2 行列だから固有値, 固有ベクトルは 2 つずつ $\omega^2 = \lambda = 1, 9,\quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 2 つの固有モード $\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1), \boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_2)$ がある.

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta_1), \quad \boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(3t - \theta_2)$$

線形微分方程式だから線形結合も解. 一般解はその線形結合.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) =& C_1 \boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1) + C_2 \boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_1) \\ =& C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t - \theta_1) + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(3t - \theta_2) \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.

次の微分方程式を考える.

$$\boldsymbol{x}''(t) = -K\boldsymbol{x}(t) \quad K \text{ は } 2\times 2 \text{ 行列}$$

物体2個の場合の固有モードによる一般解

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{\ell=1}^{2} C_\ell \boldsymbol{g}^{(\ell)}(t,\theta_\ell).$$

ここで,

- 固有モード $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t,\theta_\ell) = \boldsymbol{u}_\ell \cos(\omega_\ell t - \theta)$
- 固有周波数 ω_ℓ ($\lambda_\ell = \omega_\ell^2$ が K の固有値)
- $\boldsymbol{u}_\ell$: K の固有ベクトル.
- C_ℓ, θ_ℓ は任意定数.

固有周波数, 固有モードは, $\boxed{}$ と同じ数だけ (いまは2個) ある.

問題 (連成振動の固有モード)

次の 1 のうち, 物体番号 1 に対応するのはどれ (何個でも)?

1. x_1
2. X_1
3. C_1
4. $\boldsymbol{u}_1$
5. θ_1
6. $\boldsymbol{g}^{(1)}$
7. $(\boldsymbol{u}_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right))$ の a_1

4 つの独立な解, という言い方

加法定理を使うと,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) =& C_1\boldsymbol{u}_1(\cos\omega_1 t\cos\theta_1 + \sin\omega_1 t\sin\theta_1)\\ &+ C_2\boldsymbol{u}_2(\cos\omega_2 t\cos\theta_2 + \sin\omega_2 t\sin\theta_2)\\ =& A_1\boldsymbol{u}_1\cos\omega_1 t + B_1\boldsymbol{u}_1\sin\omega_1 t + A_2\boldsymbol{u}_2\cos\omega_2 t + B_2\boldsymbol{u}_2\sin\omega_2 t.\end{aligned}$$

という 4 つの独立な解の線形結合とも思える.
2 変数, 2 階だから 4 個の任意定数.

これ物理数学 II, 数理モデル基礎 I でやってたのの進化バージョン

よく, $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいてみて λ を決める, ってやってたでしょ.
今の場合,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}\cos(\omega t - \theta) = \boldsymbol{u}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\omega t - i\theta} + \mathrm{e}^{-(i\omega t - i\theta)}) = \boldsymbol{u}(A\mathrm{e}^{i\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t})$$

.

- λ と ω は $i = \sqrt{-1}$ 倍違うだけ.
- 以前は定数倍は気にしてなかったけど, 今回は $\boldsymbol{u}$ も決める.

固有周波数, 固有モードを経由した連成振動の解き方

1. K の固有値 ω^2, 固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \binom{a_1}{a_2}$ を求める (各 2 個ある).
2. 固有周波数 ω, 固有モード $\boldsymbol{g}(t,\theta) = \boldsymbol{u}\cos(\omega t - \theta)$ を作る (各 2 個ある)
3. 2 個の固有モードの線形結合

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{\ell=1}^{2} C_\ell \boldsymbol{g}^{(\ell)}(t,\theta_\ell)$$

   が一般解.
4. 初期条件から, $C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ を決める.

近未来に考えること: 固有モードと基準座標の関係.

問題 (連成振動の基準座標と固有モード)

連成振動について, 間違っているものの番号を (何個でも) 答えよう.

1. 基準座標と固有モードの個数は同じ
2. 固有周波数と, 基準座標の単振動の周波数は同じ
3. 基準座標に出てくる固有ベクトルと固有モードに出てくる固有ベクトルは同じ
4. 基準座標も固有モードも時間 t に依存する
5. 基準座標はベクトル
6. 固有モードはスカラー

問題 (連成振動の固有周波数, 固有モード)

連成振動を表す x_1, x_2 についての微分方程式系

$$\begin{aligned} x_1'' &= -2x_1 + 2x_2 \\ x_2'' &= -x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

の固有周波数, 固有モードを, さらに一般解を求めよう.

問題 (連成振動の固有モードを用いた解法)

連成振動の運動方程式

$$\begin{aligned} x_1'' &= -3x_1 - 2x_2 \\ x_2'' &= -2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

の固有周波数と固有モードを求めて, 初期条件
$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1'(0) = x_2'(0) = 3$ のもとで解こう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.23-32

- ばねの連成振動 小形 2 章演習問題 [1](p.38)
- ばねの連成振動 小形 2 章演習問題 [2](p.38)
- 二重振り子の連成振動 小形 2 章演習問題 [10](p.39)
- LC 回路の連成振動 小形 2 章演習問題 [11](p.14)

次回の予習ポイント

- 三角関数の和積公式

予習復習問題　水曜日の昼から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね〜

プチテストやります!

- 日時 2011-11-15 火 3, 90 分.
- 場所 いつもと同じ
- 配点 100 点が 30 ピーナッツ.
- 参照 なし.
- 公欠 基準と届が独自です．Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画 未確定です．2011-11-08 火の授業で修正+詳細化される予定です.

- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を立てよう (L01,L02)
- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を解こう (L01)
- 式から単振動の正確なグラフを描き振幅, 周期, 周波数を答えよう (L02)
- ばねとは限らない力について, 安定, 不安定な平衡点を見つけよう.(L03)
- 安定な平衡点の近くでの微小振動の周波数, 周期を求めよう (L03)
- 物体 2 個, ばね複数のときに運動方程式を立てよう (L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに基準座標を求めて運動方程式を解こう (L05)
- 物体 2 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを求めて運動方程式を解こう (L06)
- ??(L07)
- ??(L07)

模範解答を作ろうプロジェクト!で最大 5 ピーナッツゲット!

現象の数学 B の問題の模範解答を作ってみんなで共有するプロジェクトです.
e ラーニングシステム → 現象の数学 B → 模範解答を作ろうプロジェクト!
に投稿されている問題に対して, 模範解答を紙に作成して, スキャンしたものをフォーラムに返信してください.
自宅のスキャナや, 理工学部実習室 1-612(おすすめ) や, 3 号館地下第 2 セルフラーニング室でスキャンできます.
`http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/info/teaching/scanner.php`

- 貢献に対して 1 問あたり最大 5 ピーナッツ, 1 人あたり最大 5 ピーナッツの加算があります.
- 最初の解答が完璧でなかった場合, 投稿した人, または他の人が修正したものを再投稿することができます.
- 最終的な完璧な答案を投稿した人よりも, 各難関ポイントを解決して貢献した人を評価してピーナッツを決定します. 何人かの貢献で 1 問の最終的な答案が完成したら, 5 ピーナッツがその人々に分配されます.
- また, 独立に作成した投稿でも, 同じ内容なら, 一番最初に投稿した人のみを評価します.
- 問題はときどき追加します. フォーラムの右側ブロックで, 'このフォーラムをメール購読する' を選択すると, 問題が公開されたときにメールで通知されます.