連成振動とうなり

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L07(2011-11-08 Tue)

今日の目標

1. 固有モードの考えを利用して, 連成振動の時間発展を予想できるようになろう.
2. 三角関数の和積公式を利用してうなりのグラフを描けるようになろう.

http://hig3.net

略解: 微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とかける.
K の固有値固有ベクトルは $\lambda = 3, 4$, $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ なので, 固有周波数 $\omega = \sqrt{3}, 2$. 固有モードは,

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(\sqrt{3}t - \theta) \quad \text{と} \quad \boldsymbol{g}^{(2)}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(2t - \theta)$$

一般解は固有モードの線形結合で

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(\sqrt{3}t - \theta_1) + C_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(2t - \theta_2)$$

ここで $C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.
問: 基準座標は?

略解:
微分方程式は

$$\boldsymbol{x}'' = -K\boldsymbol{x}, \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \boldsymbol{x}'(0) = 3\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

K の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, 5$, $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} +1 \\ +1 \end{smallmatrix}\right)$ なので, 固有周波数 $\omega = 1, \sqrt{5}$. 固有モードは,

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(t-\theta) \quad と \quad \boldsymbol{g}^{(2)}(t,\theta) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\cos(\sqrt{5}t-\theta)$$

一般解は固有モードの線形結合で

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\cos(t-\theta_1) + C_2\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\cos(\sqrt{5}t-\theta_2)$$

ここで $C_1, C_2, \theta_1, \theta_2$ は任意定数.
初期条件より, $C_1 = 0, C_2 = \frac{3}{\sqrt{5}}, \theta_1 =$ 任意$, \theta_2 = \pi/2$.

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\sin(\sqrt{5}\,t).$$

基準座標を用いた解と比較してみよう.

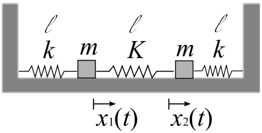
問題 (連成振り子の運命)

2 個の連成振り子の, 左側だけを持ち上げて手を放すと?

1. 左側の振り子が揺れ続ける
2. だんだん両側が同じように揺れるようになっていく
3. だんだん両側が反対に揺れるようになっていく
4. だんだん右側の振り子だけが揺れるようになっていく
5. 左側 $\to$ 右側 $\to$ 左側 $\to$ 右側 $\to \cdots$ と揺れる側が交代する
6. 大爆発する

うなり

弱いばね K でつながった, 対称な 2 個の物体を考えよう $(K \ll k)$.
固有周波数, 固有モードを求め, 初期条件 $x_1(0) = a, x_2(0) = x_1'(0) = x_2'(0) = 0$ のもとで運動を求めよう.



どんなグラフ?

和積公式 (暗記するな危険)

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= +\,2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -\,2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha + \sin\beta &= \\
\sin\alpha - \sin\beta &=
\end{aligned}
$$

加法定理

$$
\begin{aligned}
\sin(A \pm B) &= \sin A\cos B \pm \cos A\sin B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A\cos B \mp \sin A\sin B
\end{aligned}
$$

で, $A+B=\alpha, A-B=\beta$ と思って和や差を作って導く方が安全.
右辺に係数 2 が必要なのは当然. 左辺は最大 2, 右辺の $\cos\cos$ は最大 1 の量だから,

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(+\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = +a\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$
$$x_2(t) = \frac{a}{2}(-\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = +a\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t$$

差 (うなりの周波数) $\omega_{\text{beat}} = |\omega_1 - \omega_2| = \sqrt{(k+2K)/m} - \sqrt{k/m}$ (小さい)
平均 $\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \simeq \sqrt{k/m}$ とおくと, $\omega_{\text{beat}} \ll \omega_{\text{av}}$

$$x_1(t) = a\cos(\omega_{\text{av}} t)\cos(\tfrac{1}{2}\omega_{\text{beat}} t)$$

$$x_2(t) = \boxed{}$$

グラフ

問題 (固有モードの性質)

連成振動の固有周波数と固有モードについて, 正しいものをすべて選ぼう.

1. 固有モードでは, 物体の変位の比は, どの時刻でも同じである
2. 固有モードでは, 各物体は, それぞれ異なる周波数で単振動する
3. 固有モードでは, 各物体は, それぞれ異なる振幅で単振動する
4. 固有周波数は, ばねが 1 個だけある場合の周波数に等しい
5. 固有周波数は, 物体が 1 個だけある場合の周波数に等しい
6. 固有モードの総数は, 物体の個数に等しい

問題 (和積公式とうなり)

$x(t) = \cos 9t + \cos 7t$ の, 区間 $0 \leq t \leq 2\pi$ でのグラフを描こう.

2 物体の連成振動のシミュレーション (nbp)
http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mathphb_2010/coupled2.html
うなりのシミュレーション (CDF)
http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mathphb_2011/beat.cdf
うなりのサウンドファイル
http://homepage3.nifty.com/kuebiko/science/freestdy/NouUnari.htm
音叉によるうなりの動画
http://www.youtube.com/watch?v=BsG6zbdJbpA

問題 (うなり)

$x(t) = 2\cos 6t + 2\cos 8t$ のグラフを, 三角関数の和積公式を利用して $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で描こう. x,t 軸の目盛を忘れずに記そう. 描くのに使った補助線を残そう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.18-38

- うなり 小形 2 章演習問題 [5](p.39)
- うなり 小形 2 章演習問題 [6](p.39)
- うなり 小形 2 章演習問題 [7](p.39)

プチテストの次の回の予習ポイント

- 3×3 行列の固有値固有ベクトル (線形代数)

予習復習問題 水曜日の昼から月曜夜までに e ラーニングシステムでやってね〜期限はプチテスト後の 2011-11-21 月

模範解答を作ろうプロジェクト! やってます．最大 5 ピーナッツゲット!

プチテストやります!

日時 2011-11-15 火 3, 90 分.
場所 いつもと同じ
配点 100 点が 30 ピーナッツ.
参照 なし.
公欠 基準と届が独自です．Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画

- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を立てよう (L01,L02)
- 物体 1 個, ばね 1 個または複数のときに運動方程式を解こう (L01)
- 式から単振動の正確なグラフを描こう
- グラフから振幅, 周期, 周波数を答えよう (L02)
- ばねとは限らない力について, 安定, 不安定な平衡点を見つけよう.(L03)
- 安定な平衡点の近くでの微小振動の周波数, 周期を求めよう (L03)
- 物体 2 個, ばね複数のときに運動方程式を立てよう (L04)
- 物体 2 個, ばね複数のときに基準座標を求めて運動方程式を解こう (L05)
- 物体 2 個, ばね複数のときに固有周波数, 固有モードを求めて運動方程式を解こう (L06)
- ~~和積公式を利用してうなりのグラフを描こう (L07)~~
- 何か選択肢的な問