N 物体の連成振動

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L09(2011-12-06 Tue)

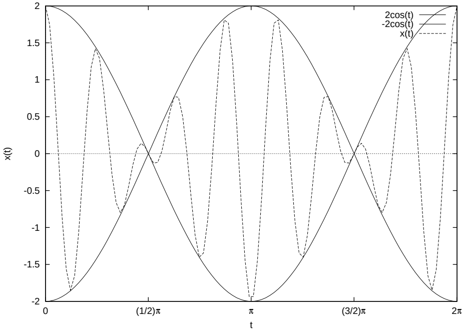
今日の目標

1. N 物体の連成振動の運動方程式を書ける.
2. N 物体の連成振動の波数と分散関係の意味を説明できる.
3. N 物体の連成振動の固有周波数と固有モードが公式で求められる.

http://hig3.net

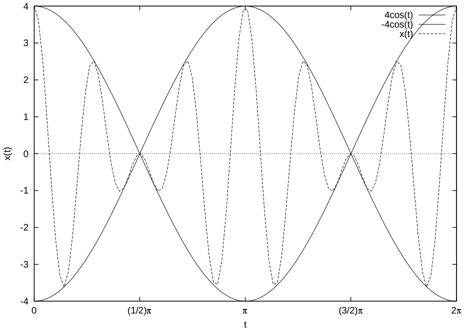
Quiz 略解 I

Quiz 略解: 和積公式によれば $x(t) = 2\cos 8t \cos t$. よって周期 2π の遅い振動 $\pm\cos t$ を上下限として, 周期 $\pi/4$ の速い振動.



Quiz 略解: 和積公式より $x(t) = 4\cos 7t \cos t$. 周期 2π の遅い振動 $\pm 4\cos t$ を上下限として, 周期 $\frac{2}{7}\pi$ の速い振動.

Quiz 略解 II



$\pm 4\cos t$ を描いた後で, $x(t)$ を描くときの注意. n を整数とする.

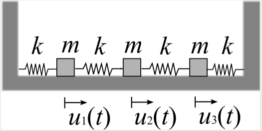
- $\cos 7t = 1$ となる $t = \frac{1}{7}(2n\pi)$ では $x(t)$ は $4\cos t$ に接する.
- $\cos 7t = -1$ となる $t = \frac{1}{7}(2n+1)\pi$ では $x(t)$ は $-4\cos t$ に接する. 特に $x(\pi) = +4$.
- $\cos 7t = 0$ となる $x = \frac{1}{7}(2n+\frac{1}{2})\pi, \frac{1}{7}(2n+\frac{3}{2})\pi$ では $x(t) = 0$ となる.

Quiz 略解 III

- $4\cos t = 0$ となる $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ でも $x(t) = 0$ となるが, これらの点は上に含まれ, 2 つの $\cos$ の両方が符号を変えるため, 積 $x(t)$ の符号は変わらない (負 $\to 0 \to$ 負). 2 次関数 $-(x - \frac{1}{2}\pi)^2$ のような形になる.

問題 (3 物体の連成振動)

図のように 4 つのばね (ばね定数 $k = 1$) で結ばれた質量 $m = 1$ の 3 物体が, 一直線上で運動している. 時刻 t における位置 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ は, それぞれの質点の平衡点 (力のつりあいの位置) からはかった変位である.



1. u_1, u_2, u_3 について運動方程式をたてよう.
2. 固有周波数を求めよう.
3. 固有モードを求めよう.

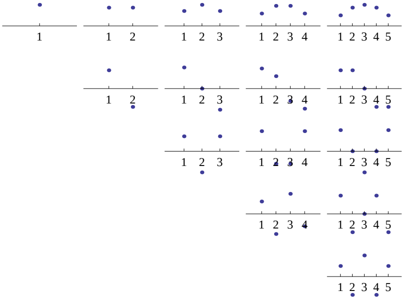
4 物体

$$
\begin{aligned}
mu_1'' &= -ku_1 - k(u_1 - u_2) \\
mu_2'' &= \qquad\qquad +k(u_1 - u_2) - k(u_2 - u_3) \\
mu_3'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +k(u_2 - u_3) - k(u_3 - u_4) \\
mu_4'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +k(u_3 - u_4) - ku_4
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{u}''(t) = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t).
$$

$N = 2, 3, 4, 5, \ldots$ 物体の場合の連成振動の固有周波数，固有モード

$N \times N$ 行列が (数値的でもいいから) 対角化できれば答えは求まる.



N 物体の連成振動の運動方程式

$$\boldsymbol{u}''(t) = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & +2 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & +2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{u}(t)$$

ふつうの (今までの) 作戦

$N \times N$ 行列式を計算 $\rightsquigarrow$ N 次方程式を解く $\rightsquigarrow$ K の固有値 λ を求める $\rightsquigarrow$ K の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を求める.

今回の作戦

$\boxed{}$ (N 個も?)

$\rightsquigarrow$ $\boxed{}$

霊感+観察 $\rightsquigarrow$ 固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sin(1p) \\ \sin(2p) \\ \vdots \\ \sin(Np) \end{pmatrix}$$

なんてどう? p は後から決める作戦.

$K\boldsymbol{v}$ の $2 \le n \le N-1$ 行目を計算すると,

$$\begin{aligned} K\boldsymbol{v}\text{の } n \text{ 行目} &= \frac{k}{m}[-\sin((n-1)p) + 2\sin(np) - \sin((n+1)p)] \\ =&\frac{k}{m}[-(\sin(np)\cos(p) - \cos(np)\sin(p)) + 2\sin(np) \\ &\qquad - (\sin(np)\cos(p) + \cos(np)\sin(p))] \\ =&2(1-\cos(p))\frac{k}{m}\sin(np). \end{aligned}$$

つまり

$$K \begin{pmatrix} \sin(1p) \\ \vdots \\ \sin(np) \\ \vdots \\ \sin(Np) \end{pmatrix} = 2(1-\cos(p))\frac{k}{m} \begin{pmatrix} \sin(1p)? \\ \vdots \\ \sin(np) \\ \vdots \\ \sin(Np)? \end{pmatrix}$$

霊感的中! 固有値 $2(1-\cos(p))\frac{k}{m}$ の固有ベクトル!?

- $n=1, N$ が不安.
- p って任意? 固有ベクトルは N 個しかないはずなんだけど.

1 行目

$$
\begin{aligned}
&K\boldsymbol{v}\text{の 1 行目}\\
&\qquad=\frac{k}{m}[2\sin(1p)-1\sin(2p)]\\
&\qquad=\frac{k}{m}[2\sin(p)-2\sin(p)\cos(p)]\\
&\qquad=(2-\cos(p))\frac{k}{m}\sin(p)
\end{aligned}
$$

OK.

N 行目

$$
\begin{aligned}
K\boldsymbol{v}\text{の } N \text{ 行目 } &= \frac{k}{m}[-\sin((N-1)p)+2\sin(Np)] \\
&= \frac{k}{m}[-(\sin(Np)\cos(p)-\cos(Np)\sin(p))+2\sin(Np)]
\end{aligned}
$$

これが $\frac{k}{m}[(2-2\cos(p))\sin(Np)]$ になってくれないと困る．差を考えて，

$$
-\sin(Np)\cos(p)-\cos(Np)\sin(p)=\sin((N+1)p)
$$

が 0 になってくれないと困る．

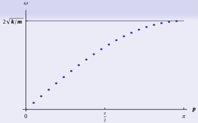
$$
(N+1)p=\ell\pi \quad (\ell=1,\ldots,N).
$$

$\ell\le 0, \ell\ge N+1$ もあるけど，無意味 or 重複．
ここで，p は物体番号 n を変化させたときの空間的な波の振動の速さを表すので，$\boxed{}$ という．$(n=1,\ldots,N)$

$\boxed{}$

波数を $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$, $\ell = 1, \ldots, N$ と書く.

固有周波数は, 固有値から, $\omega_\ell = \sqrt{\frac{k}{m}(2 - 2\cos(p_\ell))} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p_\ell)$



ω と p の関係.

ある固有モードを決めたとき

- 固有周波数 ω : 時刻 t が変化したときに $\boldsymbol{u}(t)$ がどのくらいの速さで振動するかを表す
- (固有ベクトル $\sim$) 波数 p: 物体番号 n が変化したときに $u_n(t) \sim A_n$ がどのくらいの速さで振動するかを表す

N 物体の固定端の連成振動の場合, $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p_\ell)$.

N 物体の固定端の連成振動のまとめ

以下, 固有モード番号 ℓ をひとつ固定する.

- 物体番号 $n = (0,)1, 2, \dots, N(, N+1)$.
- **固有周波数** $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2}\frac{\pi\ell}{N+1})$.
- 固有モード (の関数形)

$$g_n^\ell(t, \theta_\ell) = A_n \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \sin(np_\ell)\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell).$$

- ここでベクトル A_n の形は**波数** $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$ で決まってる.
- ω と p の関係 (**分散関係**) $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2}p_\ell)$

一般解は全ての固有モード $\ell = 1, 2, \dots, N$ の線形結合で

$$u_n(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell g_n^{(\ell)}(t, \theta_\ell) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(\frac{\pi\ell n}{N+1}) \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{\pi\ell}{2(N+1)})t - \theta_\ell\right).$$

問題 (物体番号モード番号の意味)

その文字 (変数) はどれ?

1. モード番号
2. 物体番号
3. ばね番号
4. ページ番号
5. モード番号の最大値
6. 物体番号の最大値
7. ばね番号の最大値
8. ページ番号の最大値

問題 (N 物体の固有モード)

モードについて次のうち正しくないのはどれ?

1. 波数が大きいほど固有振動数は大きい
2. 波数が小さいほど固有振動数は大きい
3. 波数は変位の時間的変化の速さを表す
4. 固有周波数は変位の時間的変化の速さを表す
5. 分散関係とは波数と固有周波数の関係である
6. 分散関係とは固有値と固有周波数の関係である

Quiz

問題 (固定端の連成振動)

1. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N = 2$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数と固有モードをすべて求めよう.
2. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N = 3$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数と固有モードをすべて求めよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 p.47-57

- 分散関係 小形 例題 3.2(p.55)
- N 質点の連成振動の固有モード 小形 3 章演習問題 [3](p.57),[5](p.58)

次回の予習ポイント

- 偏微分 (微積分・演習)
- 偏微分方程式 (現象の数学 A)

予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜.