波動方程式の導出

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L10(2011-12-13 Tue)

今日の目標

1. 波動方程式の意味を説明できるようになろう
2. 連成振動の運動方程式と波動方程式の関係を説明できるようになろう
3. $u(x,t)$ が波動方程式の解になっているかどうかチェックできるようになろう

http://hig3.net

Quiz 略解:

1.
$$\begin{aligned} mu_1'' &= -ku_1 - k(u_1-u_2) \\ mu_2'' &= \qquad +k(u_1-u_2) - k(u_2-u_3) \\ mu_3'' &= \qquad\qquad +k(u_2-u_3) - ku_3 \end{aligned}$$

   $m=1, k=1$ より

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. K の固有値は, $0 = \det(\lambda E - K) = (\lambda-2)((\lambda-2)^2-1) - 1(1(\lambda-2)) = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)$ より, $\lambda = 2, 2\pm\sqrt{2}$. よって, 固有周波数 $\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}} > 0$.

3. これらの λ に対応する固有ベクトルは, $(\lambda E - K)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を解いて,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有モードはそれぞれ,

$$\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}t - \theta_1\right),$$
$$\boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2}t - \theta_2\right),$$
$$\boldsymbol{g}^{(3)}(t, \theta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t - \theta_3\right).$$

ちなみに一般解は, C_i, θ_i を任意定数として

$$\boldsymbol{u}(t) = C_1\boldsymbol{g}^{(1)}(t, \theta_1) + C_2\boldsymbol{g}^{(2)}(t, \theta_2) + C_3\boldsymbol{g}^{(3)}(t, \theta_3)$$

$= \omega$ と p の関係

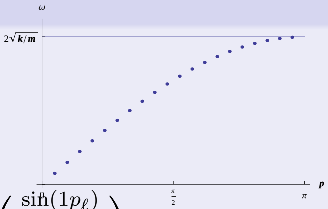
ある固有モードを決めたとき

- 固有周波数 ω : 時刻 t が変化したときに $\boldsymbol{g}(t)$ がどのくらいの速さで振動するかを表す
- 波数 p: 物体番号 n が変化したとき (ベクトルの成分を上から見ていったとき) に成分 v_n がどのくらいの速さで振動するかを表す

N 物体の固定端の連成振動の場合, $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p_\ell)$.

固有モード ⟵ 固有値 (固有周波数)
固有ベクトル ⟵

N 物体の固定端の連成振動の固有モード



物体番号 $n = 1, 2, \ldots, N.$

固有モード番号 $\ell = 1, 2, \ldots, N.$

固有周波数 ω_ℓ

固有モード $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta_\ell) = \boldsymbol{v}_\ell \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \begin{pmatrix} \sin(1p_\ell) \\ \sin(2p_\ell) \\ \vdots \\ \sin(Np_\ell) \end{pmatrix} \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell).$

波数 $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$ で決まってる.

分散関係 ω と p の関係 $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2}p_\ell)$

一般解 $\boldsymbol{u}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta_\ell).$

$$u_n(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(n \cdot \tfrac{\pi\ell}{N+1}) \cos\left(\left[2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\tfrac{\pi\ell}{2(N+1)})\right] t - \theta_\ell\right).$$

問題 (N 物体の連成振動の固有モード)

モードについて次のうち正しくないのはどれ?

1. 波数が大きいほど固有振動数は大きい
2. 波数が小さいほど固有振動数は大きい
3. 波数は変位の時間的変化の速さを表す
4. 固有周波数は変位の時間的変化の速さを表す
5. 分散関係とは波数と固有周波数の関係である
6. 分散関係とは固有値と固有周波数の関係である

Quiz

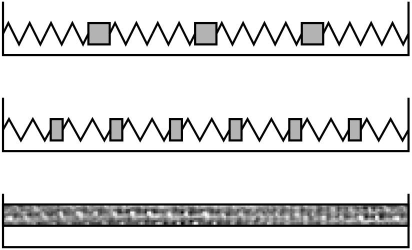
問題 (固定端の連成振動)

1. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N=2$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数と固有モードをすべて求めよう.
2. 固定端の連成振動で, 物体の個数 $N=3$ のとき, 波数, 分散関係の公式を利用して固有周波数と固有モードをすべて求めよう.

波動方程式の導出

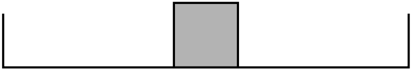
N 物体の固定端の連成振動で, $N \to +\infty$ としたい.
ただし, 全質量 M, 全ばね定数 K 全長 L は一定のままにしたい

そんな極限? $\boxed{}$



換算その 1: 物体の質量

全質量 M

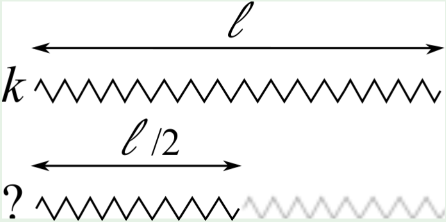


N 物体のとき, 1 個あたり $m = \boxed{\quad\quad}$.

$N \to +\infty$ で $m \to 0$.

問題 (2 本に切ったばねのばね定数)

自然長 ℓ, ばね定数 k のばねを真ん中から 2 つに切ると, 自然長は $\ell/2$, ばね定数は?



1. k^2
2. $2k$
3. k
4. $k/2$
5. $1/\sqrt{k}$

換算その 2: ばね

‘全ばね定数’ K, 全ばね長 L.

ばね長 $N = 1$ 物体のとき, ばね $1+1$ 本. 1 本あたりのばね長 $L/2$
N 物体のとき, ばね $N+1$ 本. 1 本あたりのばね長さ $\ell = L/(N+1)$
$N \to +\infty$ で $L \to 0$.

ばね定数 $N = 1$ 物体のとき, ばね $1+1$ 本. 1 本あたり $k = \boxed{\quad}$

N 物体のとき, ばね $N+1$ 本. 1 本あたり $k = \boxed{\qquad\qquad}$

$N \to +\infty$ で $\boxed{\qquad\qquad}$

換算その 3: 物体番号 $\to$ 長さ

変数 (変位) u_n の今までのののり:

- 物体 N 個 $u_1, u_2, \ldots, u_N$
- 物体 $2N$ 個 $u_1, u_2, \ldots, u_N, \ldots, u_{N+1}, \ldots, u_{2N}$

同じ u_N でも意味が全然違う! $\boxed{}$
$N \to +\infty$ でみんな u_∞!

解決策物体番号 n のかわりに端からの長さ x を使う ($0 \le x \le L$)

- 物体 N 個 $u_1 = u_{x=\frac{L}{N+1}}, \ldots, u_{N/2} = u_{x=\frac{L}{2}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{N}{N+1}L}$
- 物体 $2N$ 個 $u_1 = u_{x=\frac{L}{2N+1}}, \ldots, u_N = u_{x=\frac{L}{2}}, \ldots, u_{2N} = u_{x=\frac{2N}{2N+1}L}$

物体 $N \to +\infty$ でも真ん中は $u_{x=\frac{L}{2}}$. 記法: $u_n(t) \to u_x(t) \to \boxed{}$

換算 4: $u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}$

復習:微分の差分近似

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+\Delta x) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ 予習問題.

$u_n(t) = u(x,t)$ とする.
$\ell = \frac{1}{N+1} L = \Delta x$ と思う.

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}/k =& u_{n-1}(t) - 2u_n(t) - u_{n+1}(t) \\
=& u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t) \\
=& \ell^2 \cdot \frac{u(x-\ell) - 2u(x) + u(x-\ell)}{\ell^2} \\
\to& \ell^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}(x,t)
\end{aligned}
$$

さいごの行では, 極限 $N \to +\infty$, $\ell \to 0$.

4 個の換算をまとめると

物体番号 n の運動方程式

$$mu_n'' = k(u_{n-1} - 2u_n + u_n)$$

全質量全ばね定数全長固定で物体の個数 $N \to +\infty$. N 物体のとき

$$\frac{M}{N}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = (K(N+1))(\ell)^2\frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2\frac{u(x-\ell,t) - 2u(x,t) + u(x+\ell,t)}{\ell^2}$$

$\ell = \Delta x = L/(N+1) \to 0$, $\frac{N}{M}K(N+1)\left(\frac{L}{N+1}\right)^2 \to KL/(M/L) = v^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

ここで, $v^2 = KL/\rho$. 速さの次元を持つ定数.
$\rho = m/L$ は線質量密度 (単位長さあたりの質量), kL は, う〜ん, Young 率と太さに関係した, ばねの材質と断面積から決まる, 長さによらない量.

換算 5:物体 $n=1,N$ の隣は壁 $\to$ ひもの端は動かない (境界条件)

N 物体

物体 $n=1,N$ の隣は壁

$N\to\infty$

最初に壁の位置 $x=0,L$ にあったひも上のマークは動かない

$\rightsquigarrow$ 任意の t に対して $u(0,t)=u(L,t)=0.$ 境界条件

別の考え方

壁の位置 (ひもの両端) にもう 1 個ずつ物体 u_0,u_{N+1} があって動かない,
と思ってもいい.

$u_0(t)=0\rightsquigarrow u(0,t)=0$

$u_{N+1}(t)=0\rightsquigarrow u(L,t)=0$

換算 6:初期条件 $\longrightarrow$ 初期条件

$N=2$ 物体

$u_1(0)=2, u_2(0)=0, u_1'(0)=u_2'(0)=0.$

物体の初期位置と初期速度を決めると, 任意定数 C_i, θ_i が決まって運動が定まった.

N 物体

$u_1(0)=(\cdots), u_2(0)=(\cdots), \cdots, u_N(0)=(\cdots).$

$u_1'(0)=(\cdots), u_2'(0)=(\cdots), \cdots, u_N'(0)=(\cdots).$

$N \rightarrow +\infty$

任意の x に対して $u(x,0)=F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,L)=G(x).$ 初期条件

波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 弦上の位置 x での時刻 t における変位とする.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 \le x \le L)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数

固定端の $\boxed{\text{境界条件}}$ $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

この他に $\boxed{\text{初期条件}}$ (位置と速度) $u(x,0), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ を課すと解が決まる.

Quiz

問題 (波動方程式)

長さ L のゴムひものののび $u(x,t)$ は $[0,L]$ で定義され, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (0 < x < L)$$

を満たす. 解 $u(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$ を考える. $v > 0$ は定数.

1. 時刻 $t = \frac{L}{2v}$ における変位の様子 (ゴムひもの形) を, 横軸 x 縦軸 u で描こう.
2. 点 $x = \frac{3}{4}L$ における変位の時間変化の様子を, 横軸 t 縦軸 u で描こう.
3. $\forall t \quad u(x,t) = 0$ を満たす点 x をすべて求めよう.
4. $u(x,t)$ が波動方程式を満たすことを確かめよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 p.60-64,p.80,p.81

- 小形 例題 4.1(p.68)
- 小形 4 章演習問題 [3](p.81)

次回の予習ポイント $y'' = -ay$ 型微分方程式.
予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜.