波動方程式の固有モード

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L11(2011-12-20 Tue)

今日の目標

1. 直観で波動方程式の解の時間発展を予想できるようになろう
2. 波動方程式の固有モードが求められるようになろう
3. 波動方程式の分散関係が説明できるようになろう

http://hig3.net

Quiz 略解:固定端の連成振動

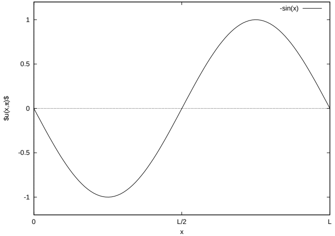
1. 波数 $p_1 = \frac{1\pi}{2+1}, p_2 = \frac{2\pi}{2+1}$.
   固有周波数 $\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$.
   固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin 1p_1 \\ \sin 2p_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin 1p_2 \\ \sin 2p_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   固有ベクトルは定数倍してもいいので, 固有モード $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta_\ell)$ は以前に求めたものと同じになる.
2. 波数 $p_1 = \frac{1\pi}{3+1}, p_2 = \frac{2\pi}{3+1}, p_2 = \frac{3\pi}{3+1}$.
   固有周波数 $\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{8}\pi = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}, \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{1}{2} p_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$. ここでは半角公式を使って $\sin \frac{1}{8}\pi, \sin \frac{3}{8}\pi$ を求めたが, まあできなくても許せるかも.

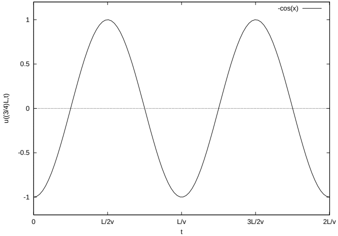
固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \sin 1p_1 \\ \sin 2p_1 \\ \sin 3p_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin 1p_2 \\ \sin 2p_2 \\ \sin 3p_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \sin 1p_3 \\ \sin 2p_3 \\ \sin 3p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 \\ -\sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix}$.

固有ベクトルは定数倍してもいいので, 固有モード $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta_\ell)$ は以前に求めたものと同じになる.

Quiz 略解:波動方程式

1. $u(x, \frac{L}{2v}) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos\pi = -\sin(\frac{2\pi}{L}x)$
2. $u(\frac{3}{4}L, t) = \sin(\frac{3\pi}{2})\cos(\frac{2\pi v}{L}t) = -\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.

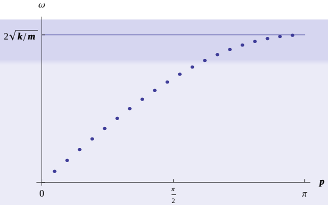




3. $u(x,t) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t) = 0$ が任意の t に対して成立するためには, $\sin(\frac{2\pi}{L}x) = 0$ となる必要があり, また十分である. よって, $x = 0, \frac{1}{2}L, L$.
4. 左辺 $= -(\frac{2\pi v}{L})^2 \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$. 右辺 $= -(\frac{2\pi}{L})^2 v^2 \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\frac{2\pi v}{L}t)$.

今回の出題形式では, (3) で $x = 0, L$ を含むかどうかが不明確だったので
どっちでも正解にしてます.

N 物体の固定端の連成振動の固有モード



物体番号 $n = 1, 2, \ldots, N.$

固有モード番号 $\ell = 1, 2, \ldots, N.$

固有周波数 ω_ℓ

固有モード $\boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta_\ell) = \boldsymbol{v}_\ell \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \begin{pmatrix} \sin(1p_\ell) \\ \sin(2p_\ell) \\ \vdots \\ \sin(Np_\ell) \end{pmatrix} \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell).$

波数 $p_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}$, $\ell = 1, 2, \ldots, N.$

分散関係 ω と p の関係 $\omega_\ell = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\frac{1}{2}p_\ell)$

一般解 $\boldsymbol{u}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \boldsymbol{g}^{(\ell)}(t, \theta_\ell).$

$$u_n(t) = \sum_{\ell=1}^{N} C_\ell \sin(n \cdot \tfrac{\pi\ell}{N+1}) \cos\left(\left[2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\tfrac{\pi\ell}{2(N+1)})\right] t - \theta_\ell\right).$$

波動方程式

波動方程式

$u(x,t)$: 時刻 t での, 弦の位置 x における変位

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$v > 0$: 速さの次元を持つ定数

波動方程式は $\boxed{}$ の一種

有限区間 $0 \leq x \leq L$ で考えるとき, $x = 0, L$ で $\boxed{}$ 条件を課すことが必要. 例: 固定端=固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

さらに $\boxed{}$ 条件 $u(x,0) = F(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$ を定めると解が定まる.

波動方程式で記述される世の中の現象

- 音波
- 弦の振動
- 地震波
- 電波 (電磁波)
- 弾性体の振動

いろんな偏微分方程式の出てくる科目

- 現象の数学 A(拡散方程式)
- 計算科学 I(拡散方程式)
- 偏微分方程式 (一般の 1 階偏微分方程式)
- 理論物理 B(シュレーディンガー方程式)
- 電気・磁気 (マクスウェル方程式)

$\leftrightarrow$ 常微分方程式 in 数理モデル基礎, 物理数学

換算 5:物体 $n=1,N$ の隣は壁 $\to$ ひもの端は動かない (境界条件)

N 物体

物体 $n=1,N$ の隣は壁

$N\to\infty$

最初に壁の位置 $x=0,L$ にあったひも上のマークは動かない

$\leadsto$ 任意の t に対して $u(0,t)=u(L,t)=0.$ 境界条件

別の考え方

壁の位置 (ひもの両端) にもう 1 個ずつ物体 u_0,u_{N+1} があって動かない,
と思ってもいい.

$u_0(t)=0\leadsto u(0,t)=0$

$u_{N+1}(t)=0\leadsto u(L,t)=0$

換算 6:初期条件 $\longrightarrow$ 初期条件

$N=2$ 物体

$u_1(0)=2, u_2(0)=0, u_1'(0)=u_2'(0)=0.$

物体の初期位置と初期速度を決めると, 任意定数 C_i, θ_i が決まって運動が定まった.

N 物体

$u_1(0), u_2(0), \cdots, u_N(0),$

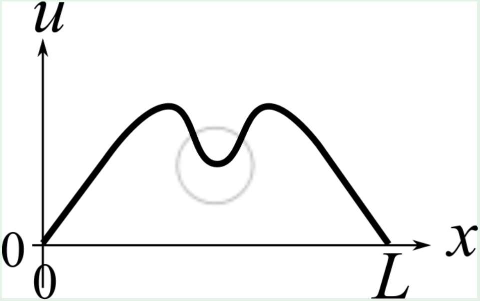
$u_1'(0), u_2'(0), \cdots, u_N'(0)$ を指定.

$N \to +\infty$

任意の x に対して $u(x,0)=F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=G(x).$ 初期条件

問題 (波動方程式の時間発展)

この状態からそっと手を放すと，この部分はどう動く?



1. 上
2. しばらく動かない
3. 下
4. 爆発する

波動方程式の直観的意味

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$: 点 x が時刻 t に受ける力 (に比例)
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$: 弦の形が上に凸または下に凸を表す

弦がまっすぐなところ

弦がでっぱってるところ

弦がへっこんでるところ

連成振動と波動の比較

	連成振動	波動
変位	$u_n(t)$	$u(x,t)$
時刻	t	t
位置	$n = 1, 2, \ldots, N$	$0 \le x \le L$

N 物体の固定端の連成振動では, ℓ 番目の固有モードは

$$g_n^{(\ell)}(t) = \sin(np_\ell) \times \cos(\omega_\ell t - \theta_\ell) = \boxed{}$$

だった.

波動方程式に対しても $u(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ みたいな解を探そう!

$$\text{(波)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$
$$\text{(境)} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

を解こう. $u(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ とおいてみる.

$$\begin{aligned} \text{(波)} \rightsquigarrow -\omega^2 f(x)\cos(\omega t) =& v^2 f''(x)\cos(\omega t) \\ f''(x) =& -\left(\tfrac{\omega}{v}\right)^2 f(x) \end{aligned}$$

よって, $f(x) = \boxed{}$. A, ϕ は任意定数.
一方,

$$\text{(境)} \rightsquigarrow f(0)\cos(\omega t) = f(L)\cos(\omega t) = 0$$

よって, $\sin(-\phi) = 0$ かつ $\sin(\frac{\omega}{v}L - \phi) = 0$.
$\phi = 0$ かつ $\frac{\omega}{v}L = \pi\ell$ ($\ell \in \mathbb{Z}$).

波動方程式の固有モード

固定境界条件の波動方程式の固有モード

$$g^{(\ell)}(x,t;\theta) = C\sin(px)\cos(\omega t-\theta)$$

- p:波数. $p=\frac{\ell\pi}{L}$. $\ell\in\mathbb{Z}$ はモード番号.
- ω: 固有周波数. $\boxed{}$ $\omega = pv$ で定まる.

比較:連成振動 と 波動

	連成振動	波動
波数 p の現れ方	$\sin(pn)$	$\sin(px)$
p の値	$\frac{\ell\pi}{N+1}$	$\frac{\ell\pi}{L}$
ℓ の範囲	$\ell=1,2,\ldots,N$	$\boxed{?}$
波数の単位	無次元 (radian)	radian/m
分散関係	$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p)$	$\omega = vp$

波動方程式の固有モードは何個ある?

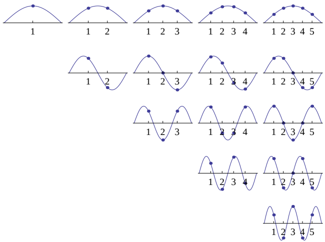
$\ell \in \mathbb{Z}$ っていうけど, 本当にぜんぶいるの?

$$\sin(px) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right)$$

役立たず: $\boxed{\qquad\qquad}$ $\sin(px) = 0$. ほしくない.

かぶってる: $\boxed{\qquad\qquad}$. $C\sin(-px) = (-C)\sin(px)$.

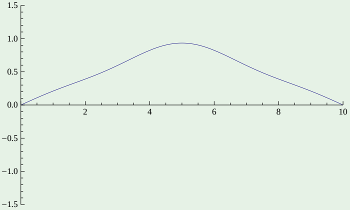
結局, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ で十分.



比較 連成振動では $\ell = 1, 2, \ldots, N$.

問題 (波動方程式の時間発展)

固定端の弦の振動を考える．横軸 x, 縦軸 u のこの状態からそっと手を放すと，どう変化していく?



1.
2.
3.
4.
5.
6.

問題 (波動方程式の固有モード)

固定境界条件の波動方程式の固有モードについて, 次のうち間違ってるのはどれ?

1. ω は p の三角関数で書ける
2. u は t の三角関数で書ける
3. 振動の (時間的) 周期が長いほど, 波数は大きい
4. 波数が大きいほど (時間的に) 速く振動する
5. 波数は固有周波数に比例する

問題 (波動方程式の固有モード)

固定端の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad u(x,t) = u(L,t) = 0$$

の, $u(x,t) = \sin(\frac{3\pi}{L}x)f(t)$ という形の解を考える,

1. $f(t)$ の満たす常微分方程式を求めよう.
2. $u(\frac{1}{2}L, 0) = \sqrt{3}, \frac{\partial u}{\partial t}(\frac{1}{2}L, 0) = \frac{3\pi v}{L}$ であるとき, $f(0), f'(0)$ を求めよう.
3. 上の初期条件のもとで $f(t)$ を求めよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

小形 §4.2(p.64-70)

- 小形 例題 4.1(p.68)
- 小形 例題 4.2(p.69)
- 小形 4 章演習問題 [4](p.81)

三角関数の和積公式. フーリエ級数 (計算科学や現象の数学でやった人は)

予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は来年の月曜夜.