波動方程式の初期値問題

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L12(2012-01-10 Tue)

今日の目標

1. 振動の初期条件からすばやく任意定数を決められるようになろう
2. 波動方程式 (+固定境界条件) の一般解を書けるようになろう
3. 簡単な初期条件の時に霊感で解を見つけられるようになろう

http://hig3.net

Quiz 略解:波動方程式の固有モード

1. $f''(t) = -v^2(\frac{3\pi}{L})^2 f(t)$.
2. $u(\frac{1}{2}L, t) = -f(t)$ であることに注意すると,
   $f(0) = -\sqrt{3}, f'(0) = -\frac{3\pi v}{L}$.
3. 微分方程式を解くと, $f(t) = A\cos(\frac{3\pi v}{L}t - \theta)$. 初期条件から任意定数 A, θ を定めて, $f(t) = 2\cos(\frac{3\pi v}{L}t - \frac{7}{6}\pi)$.

問題 (振動の初期条件)

A, θ を定数とするとき, 関数 $x(t) = A\cos(3t - \theta)$ が条件
$x(0) = 2\sqrt{3}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 6$ を満たす.
$x(t)$ を求めよう.

問題 (振動の初期条件)

A, θ を定数とするとき, 関数 $x(t) = A\cos(2t - \theta)$ が条件
$x(0) = \sqrt{2}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -2\sqrt{6}$ を満たす.
$x(t)$ を求めよう.

波動方程式の固有モード

固定境界条件の波動方程式の固有モード

$$g^{(\ell)}(x,t;\theta) = C\sin(px)\cos(\omega t - \theta)$$

- p:波数. $p = \frac{\ell\pi}{L}$. $\ell \in \mathbb{Z}$ はモード番号.
- ω: 固有周波数. $\boxed{}$ $\omega = pv$ で定まる.

比較:連成振動 と 波動

	連成振動	波動
波数 p の現れ方	$\sin(pn)$	$\sin(px)$
p の値	$\frac{\ell\pi}{N+1}$	$\frac{\ell\pi}{L}$
ℓ の範囲	$\ell = 1, 2, \ldots, N$	$\ell = 1, 2, 3, \ldots$
波数の単位	無次元 (radian)	radian/m
分散関係	$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\frac{1}{2}p)$	$\omega = vp$

固有モードで解はすべて?

そんなはずない!

$g^{(1)}(x,t;0) = \sin(\frac{\pi}{L}x)\cos(\frac{\pi v}{L}t)$,

$g^{(2)}(x,t;0) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)\cos(\boxed{}t)$ はともに固有モード, よって解.

このとき, $\boxed{}$ も解 (一般に解の線形結合は解)

なぜなら, 波動方程式は線形だから.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =& \left(A\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial t^2}\right) - v^2\left(A\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x^2}\right)\\ =&A\left(\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x^2}\right)\\ =&A\cdot 0 + B\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

数理モデル基礎の線形**常**微分方程式のところで聞いたような話…

波動方程式の一般解

実は, (ある意味) 固有モードの線形結合で解はすべて.
つまり, 一般解は固有モードの線形結合. 待て Fourier 級数変換.

固定境界条件の波動方程式の一般解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 \le x \le L) \quad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

の一般解は, 線形結合

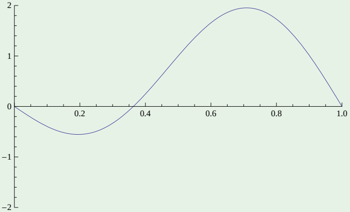
$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell g^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell \sin(p_\ell x)\cos(\omega_\ell t - \theta_\ell)$$

$$= (\cos \text{ の加法定理}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(p_\ell x)[A_\ell \cos(\omega_\ell t) + B_\ell \sin(\omega_\ell t)]$$

$p_\ell = \ell\pi/L$, $\omega_\ell = v p_\ell = \ell\pi v/L$, $\ell = 1, 2, 3, \ldots$.
$(C_\ell, \theta_\ell), (A_\ell, B_\ell)$: 任意定数

問題 (波動の初期値境界値問題)

波動方程式に従う弦を, 下の形でそっと手を放したとき, 節 ($u(x,t)=0$ であるような x) はどっちに動く?



1. 左に動く
2. 動かない
3. 右に動く
4. 節が 2 個に分裂して左右に動く
5. 多数の節に分裂して大爆発する

霊感解法

Quiz (初期値境界値問題)

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ を,

$$\text{固定境界条件} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0,$$
$$\text{初期条件} \quad u(x,0) = F(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$$

のもとで解け.

一般解は, $u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell \sin(p_\ell x)\cos(\omega_\ell t) + B_\ell \sin(p_\ell x)\sin(\omega_\ell t)]$ と書ける. (A_ℓ, B_ℓ) 任意定数. この時点

で $\boxed{}$ OK

ここからが霊感解法

霊感で $A_1 = 3, A_2 = 9, A_3 = 370, \ldots, B_1 = 0, B_2 = 2, \ldots$ などとうまく決めて，

$$u(x,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell \sin(p_\ell x) \cos(\omega_\ell t) + B_\ell \sin(p_\ell x) \sin(\omega_\ell t)]$$

が初期条件

$$u(x,0) = F(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = G(x)$$

を満たすようにする．そうできれば，それが求める解．

もっと説得力のある霊感解法

Quiz

固定境界条件の波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3\sin(\tfrac{\pi}{L}x).$$

$\boxed{}$のお告げ: $A_2 = A_3 = \cdots = 0, B_2 = B_3 = \cdots = 0.$ $A_1 =?$, $B_1 =?$

$$u(x,t) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[A_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) + B_1\sin(\tfrac{\pi v}{L}t)]$$ とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sin(\tfrac{\pi}{L}x)[-A_1\tfrac{\pi v}{L}\sin(\tfrac{\pi v}{L}t) + \tfrac{\pi v}{L}B_1\cos(\tfrac{\pi v}{L}t)]$$

問題 (波動の初期値境界値問題)

固定境界条件 ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解こう.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x) - 3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

問題 (波動の固有モード)

固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ を課した波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

の固有モードを $g^{(\ell)}(x,t;\theta)$ とする ($\ell = 1,2,3,\ldots$). 解になってないのはどれ?

1. $g^{(1)}(x,t;0) - g^{(2)}(x,t;\pi)$
2. $g^{(2)}(x,t;0) \times g^{(3)}(x,t;\pi)$
3. $1 - 2g^{(1)}(x,t;0)$
4. $-5g^{(1)}(x,t;\pi)$
5. $(g^{(1)}(x,t;0))^2$

霊感解法卒業前夜

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm} = \frac{\pi}{2} \times \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

クロネッカーの δ 記号

変数変換 $\theta = \frac{\pi}{L}x$

$$\boxed{} = \delta_{nm}$$

$\boxed{\phantom{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}}}$ は正規直交基底.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

Fourier 級数変換 小形 §4.3, 自由端 小形 p.75-78)

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- Fourier 級数展開 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)

予習復習問題明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜.

問題 (波動の初期値境界値問題)

固定境界条件 ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解こう.

$$u(x,0) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x).$$