波動方程式の初期値問題のフーリエ級数展開による解法

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B L13(2012-01-17 Tue)

今日の目標

1. フーリエ級数展開を用いて初期条件を満たす解を見つけられるようになろう

http://hig3.net

Quiz 略解:振動の初期条件
$x(t) = 4\cos(3t - \frac{1}{6}\pi) = 2\sqrt{3}\cos(3t) + 2\sin(3t)$.
Quiz 略解:振動の初期条件
$x(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t - \frac{5}{3}\pi) = \sqrt{2}\cos(2t) - \sqrt{6}\sin(2t)$.
Quiz 略解:波動の初期値境界値問題 固定境界条件のもとでの波動方程式の一般解は

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)]$$

初期条件はモード $\ell = 1, 2$ だけを含むので,
$A_3 = A_4 = \cdots = B_3 = B_4 = \cdots = 0$ として,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{2} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)]$$

とおいてみる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{\ell=1}^{2} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\frac{\ell\pi v}{L}[-A_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)].$$

$$u(x,0) = \sum_{\ell=1}^{2} A_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x) - 3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{\ell=1}^{2} \frac{\ell\pi v}{L} B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x) = 0$$

よって, $B_1 = B_2 = 0$, $A_1 = -2, A_2 = -3$ とすると初期条件が満たされる.
条件を満たす解は

$$u(x,t) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) - 3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\cos(\tfrac{2\pi v}{L}t).$$

見通しのよい人は, 初期条件の時間微分が zero であることから $B_\ell = 0$ を見抜くでしょう.

Quiz 略解:波動の初期値境界値問題　固定境界条件のもとでの波動方程式の一般解は

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(\frac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\frac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\frac{\ell\pi v}{L}t)]$$

初期条件はモード $\ell = 1, 2$ だけを含むので,
$A_3 = A_4 = \cdots = B_3 = B_4 = \cdots = 0$ として,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{2} \sin(\frac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\frac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\frac{\ell\pi v}{L}t)]$$

とおいてみる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{\ell=1}^{2} \sin(\frac{\ell\pi}{L}x)\frac{\ell\pi v}{L}[-A_\ell \sin(\frac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \cos(\frac{\ell\pi v}{L}t)].$$

$$u(x,0) = \sum_{\ell=1}^{2} A_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{\ell=1}^{2} \frac{\ell\pi v}{L} B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x) = -3\sin(\tfrac{2\pi}{L}x)$$

よって, $A_2 = B_1 = 0$, $A_1 = -2, B_2 = -\frac{3L}{2\pi v}$ とすると初期条件が満たされる.
条件を満たす解は

$$u(x,t) = -2\sin(\tfrac{\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\pi v}{L}t) - \tfrac{3L}{2\pi v}\sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\sin(\tfrac{2\pi v}{L}t).$$

霊感解法卒業前夜

$\ell, m = 1, 2, 3, \ldots.$

$$\int_0^\pi \sin \ell\theta \sin m\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{\ell m} = \frac{\pi}{2} \times \begin{cases} 1 & (\ell = m) \\ 0 & (\ell \neq m) \end{cases}$$

クロネッカーの δ 記号

変数変換 $\theta = \frac{\pi}{L}x$ により, $\boxed{} = \delta_{\ell m}$.

$\langle e_\ell(x) \rangle_{\ell=1,2,3,\cdots}$ は '正規直交基底'. $\boxed{}$

もうちょっと練習.

$\theta^n \sin\theta$ の不定積分

$$\int \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\cos\theta$$

$$\int \theta\sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta$$

$$\int \theta^2\sin\theta \, \mathrm{d}\theta = (2-\theta^2)\cos\theta + 2\theta\sin\theta$$

$$\vdots$$

これは, 部分積分を繰り返して証明できる.
じゃあ

$$\int_0^L x^2 \sin\tfrac{\ell\pi}{L}x \, \mathrm{d}x = \boxed{}$$

霊感解法卒業

フーリエ級数変換による解法

固定境界条件の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解け.

$$u(x,0) = 1 - \cos(\tfrac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

一般解は,

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)[A_\ell \cos(\tfrac{\ell\pi v}{L}t) + B_\ell \sin(\tfrac{\ell\pi v}{L}t)]$$
$$= A_1 \sin(\tfrac{1\pi}{L}x)\cos(\tfrac{1\pi v}{L}t) + A_2 \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\cos(\tfrac{2\pi v}{L}t) + \cdots + [B]$$

$u(x,0) =$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) =$

境界条件から A_ℓ, B_ℓ を定めよう. 霊感がないので, 両辺に

三角関数の正規直交関係

$e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x$ に対して

$$\int_0^L e_\ell(x) e_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{\ell m} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq m) \\ 1 & (\ell = m) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell e_\ell(x)$, という展開をフーリエ級数展開という.

両辺に $\int_0^L \mathrm{d}x\; e_m(x) \times$ することで, $c_m = \int_0^L e_m(x) f(x)\,\mathrm{d}x$ と求められる (フーリエ級数変換)

どっかでみたことない?

ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする.

$\boxed{}$ $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ をとるとき,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}$$

となるように 係数 c_1, c_2, c_3 を決めよう.

霊感解法 c_1, c_2, c_3 を適当にきめてあうかどうかやってみる.

ちょっと進歩した霊感解法 各成分で, c_1, c_2, c_3 についての連立方程式をたてとく (先週の方法)

フーリエ級数変換 $c_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}$ (今週の方法)

$\langle e_\ell(x) \rangle_{\ell=1,2,3,\cdots}$, $e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x$ は関数からなるベクトル空間の '正規直交基底'.

関数の間の内積は

$$f \cdot g = \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

問題 (正規直交基底での展開)

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のときに内積を使って c_1, c_2, c_3 を求めよう.

問題 (波動方程式の初期値問題)

区間 $(0, L)$ で, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える ($L, v > 0$ は定数).
固定境界条件 $u(0,t) = u(L,t) = 0$,
初期条件 $u(x,0) = x^2 - Lx$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$
のもとで解を求めよう. ただし, 解は固有モードの和として書けばいい.
しかも上で出てきた公式はぜんぶ使っちゃっていい.

Hint:
$\int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x \times (-Lx)\, \mathrm{d}x$
ってさっきの公式で計算できる…

ファイナルトライアル計画!

外部記憶ペーパーあり．別紙参照．
出題計画 2012-01-24 に情報を更新します．

- 基準座標を利用して 2 物体の連成振動の運動を求めよう (プチテスト再出題)
- 固有周波数と固有モードを利用して 2 物体の連成振動の運動を求めよう (プチテスト再出題)
- 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう (L08) 公式使用不可．行列の固有値と固有ベクトル求める方法で．
- うなりの $x(t)$ のグラフを描こう (L08)
- N 物体の固有周波数と固有モードと波数を求めよう (L09) 外部記憶ペーパーに書いておいた公式使用可．
- 波動方程式の直観的意味 (L10)
- 波動方程式の固有モード, 分散関係 (L11)
- 波動方程式の初期値問題の霊感解法 (L12)
- フーリエ級数変換を利用した初期値問題の解 (L13)
- ダランベールの進行波解 (L14)

おすすめのファイナルトライアル準備方法

去年のファイナルトライアルの問題と略解は公開してるけど，それより下のリストに従って各回の quiz を復習しておくことをお奨めします．模範解答を作ろうプロジェクトもやってます．

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

フーリエ級数変換 小形 §4.3

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- フーリエ 級数展開 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)

補講

2012-01-24 火 3 教室は 1-107

欠席届

公務欠席届の提出機会は，今日の講義前後，来週の講義前後，ファイナルトライアルの講義前後，だけに限られます．まだ提出していない分がある人は用意しておいてね．