波動方程式の進行波解

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

現象の数学 B　L14(2012-01-24 Tue)

今日の目標

1. 進行波解が波動方程式の解であることを説明できるようになろう
2. 進行波解のグラフを描けるようになろう

http://hig3.net

Quiz 略解:波動方程式の初期値問題

$A_\ell = -\frac{4L^2}{\ell^3\pi^3}(1-(-1)^\ell)$, $B_\ell = 0$.

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{-4(1-(-1)^\ell)L^2}{\ell^3\pi^3} \sin\frac{\ell\pi}{L}x \cos\frac{\ell\pi v}{L}t$$

.

三角関数の正規直交関係

$e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x$ に対して

$$\int_0^L e_\ell(x) e_m(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{\ell m} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq m) \\ 1 & (\ell = m) \end{cases}$$

フーリエ級数展開

$f(x) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} c_\ell e_\ell(x)$, という展開をフーリエ級数展開という.

両辺に $\displaystyle\int_0^L \mathrm{d}x\ e_m(x) \times$ することで, $c_m = \displaystyle\int_0^L e_m(x) f(x)\, \mathrm{d}x$ と求められる (フーリエ級数変換)

どっかでみたことない?

ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする.

$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ をとるとき,

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}$$

となるように 係数 c_1, c_2, c_3 を決めよう.

霊感解法 c_1, c_2, c_3 を適当にきめてあうかどうかやってみる.

ちょっと進歩した霊感解法 各成分で, c_1, c_2, c_3 についての連立方程式をたてでとく (先々週の方法)

フーリエ級数変換 $c_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}$ (先週の方法)

$\langle e_\ell(x) \rangle_{\ell=1,2,3,\cdots}$, $e_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\ell\pi}{L} x$ は関数からなるベクトル空間の '正規直交基底'.

関数の間の内積は

$$f \cdot g = \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

問題 (正規直交基底での展開)

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のときに内積を使って c_1, c_2, c_3 を求めよう.

霊感解法とフーリエ級数変換による解法の関係

問題 (波動の初期値境界値問題)

固定境界条件 ($u(0,t)=u(L,t)=0$) の波動方程式を, 次の初期条件のもとで解こう.

$$u(x,0)=-2\sin(\frac{\pi}{L}x)-3\sin(\frac{2\pi}{L}x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

進行波解 (ダランベールの解)

今日は境界条件のことは考えません. $-\infty < x < +\infty$ 全体で考えると思ってもいい.

進行波解 (ダランベールの解)

$u(x,t)$ について, 次の 2 つは同値.

- 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

  の解である
- 適当な 1 変数関数 $f(z), g(z)$ を用いて

$$u(x,t) = f(x+vt) + g(x-vt)$$

  と書ける

進行波解の例

$$u(x,t) = \sin(x - vt)$$

- $f(x-vt)$ である例: $3, x^2 - 2xvt + v^2t^2, (x-vt)^2 \times \sin(x-vt), \ldots$
- $f(x-vt)$ でない例: $(x-vt)^2 + x$, $vx + t$, xvt, $x + vt, \ldots$

'書けるなら解である' ことの証明

$$\text{右辺} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x - vt) = v^2 g''(x - vt).$$

$$\text{左辺} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x - vt) = \boxed{} = (-v)^2 g''(x - vt)$$

f も同様. 線形なので $f + g$ も解.

大注意: $g(z) = z^2$ について

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z}(z) = \boxed{}$$

$$g'(ax+bt) = \boxed{}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(ax+bt) = \boxed{}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(ax+bt) = \boxed{}$$

'解であるなら書ける' ことの証明

$$
\begin{aligned}
g^{(\ell)}(x,t;\theta_\ell) =& \sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x)\cos(\tfrac{\ell\pi vt}{L}-\theta_\ell)\\
=&(\text{積和公式})\\
=&\tfrac{1}{2}[\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x+\tfrac{\ell\pi vt}{L}-\theta_\ell)+\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}x-\tfrac{\ell\pi vt}{L}+\theta_\ell)]\\
=&\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x+vt)-\theta_\ell)+\tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\ell\pi}{L}(x-vt)+\theta_\ell)\\
=&f(x+vt)+g(x-vt)
\end{aligned}
$$

$f(x+vt)$ の意味

波形 $y=f(x)$ を, $-vt$ だけ x 方向に平行移動したもの.
$y=f(x)$ の形を保ったまま

$g(x-vt)$ は
$y=g(x)$ の形を保ったまま

進行波解

波動方程式の解は,

波動方程式に現れる定数 v は進行波の速さ.

話せなかったこと: 固定端, 自由端での波の ‘反射’

問題 (ダランベールの解)

$u(x,t) = f(x+\frac{1}{2}t) + 2f(x-\frac{1}{2}t)$, ただし

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z < -2) \\ 4+2z & (-2 \le z < 0) \\ 4-2z & (0 \le z < 2) \\ 0 & (2 \le z) \end{cases}$$

とする.

1. $t = -4$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
2. $t = 0$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.
3. $t = 3$ のとき, $y = u(x,t)$ のグラフを, 横軸 x, 縦軸 y で描こう.

ファイナルトライアル計画!

外部記憶ペーパーあり．別紙参照.
出題計画

- 基準座標を利用して 2 物体の連成振動の運動を求めよう (プチテスト再出題)
- 固有周波数と固有モードを利用して 2 物体の連成振動の運動を求めよう (プチテスト再出題)
- 3 物体の連成振動の固有周波数と固有モードを求めよう (L08) 公式使用不可．行列の固有値と固有ベクトル求める方法で.
- うなりの $x(t)$ のグラフを描こう (L08)
- N 物体の固有周波数と固有モードと波数を求めよう (L09) 外部記憶ペーパーに書いておいた公式使用可.
- 波動方程式の直観的意味, 時間発展の直観的判定 (L10,L11)
- 波動方程式の固有モード, 分散関係 (L11)
- 波動方程式の初期値問題の霊感解法 (L12)
- フーリエ級数変換を利用した初期値問題の解 (L13)
- 進行波解 (L14)

おすすめのファイナルトライアル準備方法

去年のファイナルトライアルの問題と略解は公開してるけど，それより下のリストに従って各回の quiz を復習しておくことをお奨めします．模範解答を作ろうプロジェクトもやってます．

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

フーリエ級数変換 小形 §4.3

- 初期値問題 小形 例題 4.3(p.72)
- フーリエ 級数展開 小形 第 4 章演習問題 [1](p81),[6][8](p.82)
- 進行波解 小形 第 6 章演習問題 [1][3](p131),[8][10][11](p.132)

復習問題今回も復習問題あります．明日水曜日の昼には e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜締切は月曜夜．

欠席届

公務欠席届の提出機会は，今日の講義前後，来週の講義前後，ファイナルトライアルの講義前後，だけに限られます．まだ提出していない分がある人は用意しておいてね．