

平衡点と微小振動

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

現象の数学 B L03(2012-10-09 Tue)

今日の目標

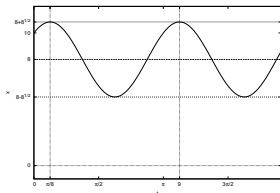
- ① 平衡点=力のつりあう点を見つけられるようになる
- ② 平衡点のまわりの振動を単振動で近似して、その周期を求められるようになる。



<http://hig3.net>

Quiz 解答:単振動のグラフ

$$x(t) = 2 \cos 2t + 2 \sin 2t + 8 = 2\sqrt{2} \cos(2t - \frac{1}{4}\pi) + 8$$



振幅, 周期, 初期位相 (その 3 つあれば周波数とか振動数とか全部決まるでしょ?) が読み取れるように, 軸に数を記入しよう.

Quiz 解答:ばね複数の振動

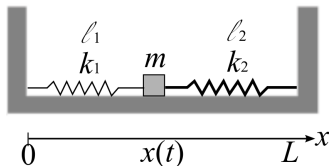
① $mx'' = -2k(x - \ell) + k(L - x - \ell).$

② $mx'' + 3kx = k(L + \ell)$ より, 一般解は

$$x(t) = A \cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \theta) + \frac{L+\ell}{3}. \quad (A, \theta \text{ は任意定数}). \quad \text{よって, 周波数}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}.$$

両側にばね



ばねを引っ張って取り付けた場合 $l_1 + l_2 < L$

ばねを押し込めて取り付けた場合 $l_1 + l_2 > L$

運動方程式は

$$mx''(t) = F(x),$$

力 $F(x) =$

=

Quiz(ばねを両側につけた場合の周期)

物体の両側にはばねをつけて、ある間隔 L の壁の間に設置した。
間隔 L によって、押し込めて設置、引っ張ってのばして設置、の場合がありうる。どっちが周波数が大きい？

- ① 押し込めたときのほうが周波数が大きい
- ② どちらも同じ
- ③ 引っ張ってのばしたのほうが周波数が大きい
- ④ $m, k_1, k_2, \ell_1, \ell_2$ にもよるので、 L だけでは決まらない。
- ⑤ 引っ張ってのばしたらばねが切れた

平衡点

平衡点

力 $F(x) = 0$ となる点 $x = x_0$ を平衡点という。

- 力 $F(x_0) = 0$ を解いて求められる。
- その点にそっと (=初速度0で) 置いたら, 物体はずっとその位置にとどまる。

今の場合: 平衡点は

単振動の場合

$x(t) = x_0$ (平衡点) は

斉次方程式を考える = 平衡点を基準にした座標 $u(t) = x(t) - x_0$ で考える

$$mx'' = -k \cdot (x - x_0) \rightsquigarrow mu'' = -ku$$

非斉次微分方程式の特解の見つけ方 2 と平衡点の関係

$x''(t) = -ax(t) + b$ を解こう! $m \cdot (-ax(t) + b)$ が力.

$$x''(t) + ax(t) = b$$

$$\text{両辺から } b \text{ を引いて } x''(t) + a(x(t) - \frac{b}{a}) = 0$$

$$u(t) = x(t) - \frac{b}{a} \text{ とおいて } u''(t) + au(t) = 0$$

解くと $u(t) = A \cos(\sqrt{at} - \theta)$, つまり $x(t) = A \cos(\sqrt{at} - \theta) + \frac{b}{a}$.

要するに, 平衡点 $x_0 = \frac{b}{a}$ を原点 $u = 0$ にとった座標 $u(t) = x(t) - \frac{b}{a}$ で考えてる.

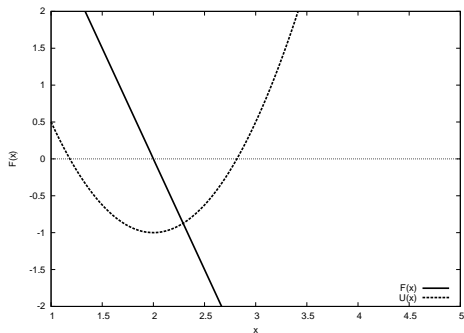
平衡点を座標の原点にとると楽

ばねの力のもとでの振動

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -3x + 6$$

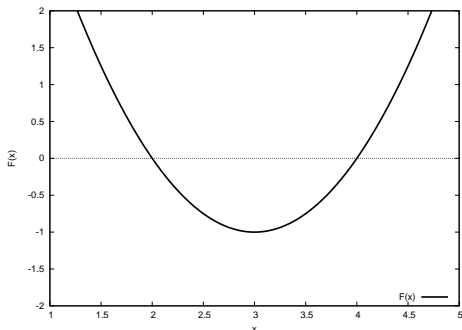
計算しなくても、平衡点の近くで振動しそうなことはわかる

平衡点 は安定な平衡点.



ばねと限らない一般の力のもとでの微小振動

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = x^2 - 6x + 8$$



- 平衡点: $F(x_0) = x_0^2 - 6x_0 + 8 = 0$ を解いて,

Quiz(微小振動:安定/不安定な平衡点)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = x^2 - 6x + 8$$

で、振動が起きそうなのはどこ？

- ① $x = 2$ のまわり
- ② $x = 3$ のまわり
- ③ $x = 4$ のまわり
- ④ $x = 2$ と $x = 4$ のまわり
- ⑤ 振動は起きない

- 振動しそうだけど単振動じゃない。運動方程式は簡単にはけない。
- は安定な平衡点, は不安定な平衡点.

安定な平衡点・不安定な平衡点

x 軸上の運動, $F(x)$: 力, $mx'' = F(x)$.

定義

- $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0$ は平衡点
 - ▶ $F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ は不安定な平衡点
 - ▶ $F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ は安定な平衡点
 - ▶ $F'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ は安定か不安定かは場合による.

性質

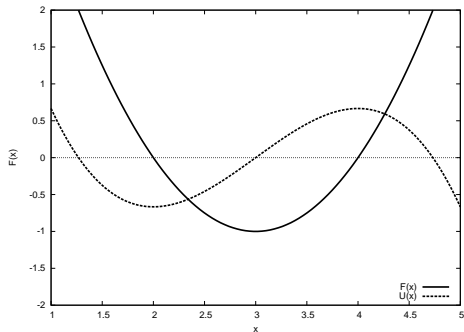
- 平衡点にそっとおいた物体は, ずっと平衡点にとどまる.
- 安定な平衡点の近くでは物体は微小振動できる.
- 不安定な平衡点の近くに物体をそっとおくと, 平衡点から離れていく.

安定/不安定平衡点とポテンシャル

ポテンシャルと力の関係: $-\frac{dU}{dx}(x) = F(x)$ or $-\nabla U = \mathbf{F}$.

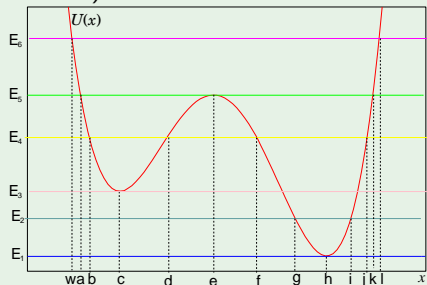
$-\frac{dU}{dx} = F(x) = x^2 - 6x + 8$ より,

ポテンシャル $U(x) =$



Quiz(ポテンシャルと微小振動)

図のポテンシャルのもとで運動する物体を考える。(単振動で近似できるような)微小振動をするようなエネルギーの値は?



- ① E_1 よりちょっと大きい
- ② E_3 よりちょっと大きい
- ③ E_5 よりちょっと大きい
- ④ E_1 よりちょっと大きいと E_3 よりちょっと大きい
- ⑤ E_1 よりちょっと大きいと E_3 よりちょっと大きいと E_5 よりちょっと大きい

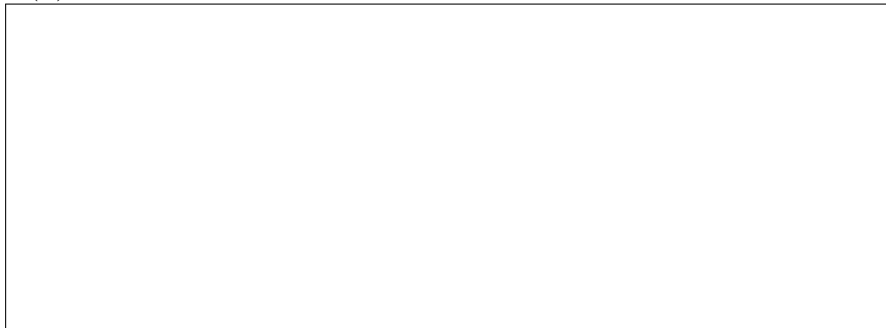
安定な平衡点の近くでの微小振動

簡単のため $m = 1$ とする.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^2 - 6x + 8$$

の安定な平衡点 $x = 2$ の近くでの様子を考えよう.

$F(x) = x^2 - 6x + 8$ を平衡点 $x = 2$ においてテイラー展開



近くの運動なら, ($|x - x_0|$ が小さければ), 2次以上を無視していいかも.

単振動で近似できる. 周波数 $\omega = \sqrt{2}$.

微小振動

$mx'' = F(x)$ に従って運動するとき, 安定な平衡点 $x = x_0$ の近くの運動は, 単振動 $mx'' = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$ で近似できる.

Quiz(微小振動の周期を求めよう!)

質量 $m = 3$ の物体の、時刻 t の座標を $x(t)$ とする. 位置 x では、力 $F(x) = \sqrt{3} - 2 \cos x$ がはたらく. 物体の $-\pi < x < +\pi$ の範囲の運動を考える.

- ① 運動方程式を書こう.
- ② 平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ③ 安定な平衡点を (すべて) 見つけよう.
- ④ 物体が安定な平衡点の十分近くで微小振動するとき, その周波数と周期を求めよう.

連絡

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題 小形 §1.4(p.12-14)

- ばね 小形 1 章演習問題 [2](p.14)

次回の予習ポイント

- 振り子
- 平衡点

物理数学 II, 力学

数理モデル II

予習復習問題 毎週水昼-月夜に e ラーニングシステムで予習復習問題やってね～

予定 2012-10-23 火 3 休講させていただきます。たぶん期末試験前に補講します。