N 体系のエネルギー保存則と衝突

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

力学 L09(2010-06-23 Wed)
更新:Time-stamp: ”2010-06-26 Sat 09:50 JST hig”

今日の目標

1. 2 体系の運動エネルギーを重心運動と相対運動にわけて計算できるようになろう
2. 運動量保存則と反発係数から x 軸上の衝突を計算できるようになろう

http://hig3.net

Quiz3 略解

軌道長半径を a とすると, 軌道周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{Gm_1m_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(m_1+m_2)}}$$

m_1:地球, $m_2 = 10^{-2}m_1$ 月のとき

$$T_{月} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\times 1.01 m_1}} = 28 \text{ 日}$$

m_1:地球, $m_2 = m_1$ イスカンダルのとき

$$T_{月} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\times 2m_1}} \simeq 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\times 1.01 m_1}} \times \sqrt{\frac{1.01}{2}} = 28/\sqrt{2} = 20 \text{ 日}$$

.
ケプラーの第 3 法則からは, 長半径が同じなら公転周期も同じはずだが, それは $m_1 \gg m_2$ の時の話.
m_2 が m_1 と同じくらいに大きくなってくると, 換算質量が減少して, その分公転周期は短くなる.

重心座標と相対座標って?

高木 II §8.2

変数変換 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 \leftrightarrow \boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$.

重心座標 $\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$

相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.

逆に解くと

$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}$.

2 体系の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}m_1\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 \ (= K_1 + K_2)$$

$$= \frac{1}{2}M\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right|^2 \ (= K_R + K_r)$$

換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 高木 II §8.3

2 体系の運動エネルギー

2 体系の全運動エネルギーは, 重心運動の運動エネルギーと相対運動の運動エネルギーに分離される:

$$K = K_1 + K_2 = K_R + K_r$$

Example 1

(重力のない 3 次元) 空間で, 質量 m_1, m_2 の 2 物体が, ばね定数 k, 自然長 $\ell = 0$ のばねでつながれている.

1. 運動方程式を書こう.
2. 重心座標 $\boldsymbol{R}$, 相対座標 $\boldsymbol{r}$ の運動方程式に書き直そう.
3. '相対座標の位置エネルギー' $U(\boldsymbol{r})$ を求めよう.

Quiz 1

上の運動方程式で $m_1 = 2, m_2 = 1, k = 6$ とすると, 次は運動方程式の解になっている.

$$\boldsymbol{r}_1(t) = (3t + 1, -2t + 2, 9t) + (1, 2, 1)\cos(3t),$$
$$\boldsymbol{r}_2(t) = (3t + 1, -2t + 2, 9t) - (2, 4, 2)\cos(3t)$$

1. 重心座標 $\boldsymbol{R}(t)$, 相対座標 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.
2. 物体 1,2 の運動エネルギー K_1, K_2 をそれぞれ求めよう.
3. 重心運動, 相対運動の運動エネルギー K_R, K_r をそれぞれ求めよう.

孤立系の運動エネルギー

外力のない N 体系では重心運動の運動エネルギーは一定.

よって $\frac{1}{2}M\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right|^2$ も一定.

孤立系であってさらに, 内力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力で, 相対運動の位置エネルギー $U(\boldsymbol{r})$ が定義されるとき, 相対運動の運動エネルギーと, 相対運動の位置エネルギーの和は保存する.

だって, 1 体のときとぜんぜん同じじゃん.

$N(\geq 2)$ 体の相対運動=重心系

$N = 3$ でやります. 高木 II §9.1

変数変換 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 \leftrightarrow \boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2, \boldsymbol{r}'_3$.

$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$.

$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}$.

での位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$

重心系での位置ベクトル (=相対運動マーク 2) $\boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}'_2, \boldsymbol{r}'_3$.

重心系では, $m_1\boldsymbol{r}'_1 + m_2\boldsymbol{r}'_2 + m_3\boldsymbol{r}'_3 = \boldsymbol{0}$. $m_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_2}{\mathrm{d}t} + m_3\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_3}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$.

重心系での運動エネルギー

$$K_i' = \frac{1}{2} m_i \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i'}{\mathrm{d}t}(t) \right|^2$$

.

全運動エネルギー $K = K_1 + K_2 + K_3$
$= K_R + (K_1' + K_2' + K_3')$
$=$ 重心運動のエネルギー
$+$ 重心系での (相対運動マーク 2 の) 運動エネルギー

外力のないとき, 重心は等速直線運動.
重心系は, 等速直線運動する座標系 (そこでは重心は静止) とも考えられる.
$\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2', \boldsymbol{r}_3'$ はその座標系での位置ベクトルとも考えられる.

ガリレイの相対性原理

互いに等速直線運動する 2 つの座標系から見ると, 物理法則は同じ.

Quiz 2

$m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 1.$

$\boldsymbol{r}_1(t) = (4 + 2t, 0, -10t + 4), \boldsymbol{r}_2(t) = (0, 0, 0), \boldsymbol{r}_3(t) = (2t, -4t, 2t).$

1. 全エネルギー, 全運動量を求めよう.
2. 重心座標を求めよう.

2' 重心座標の運動エネルギーを求めよう.

3. 重心系での各点の位置 (=相対運動マーク 2) を求めよう.
4. 重心系での全運動量と全運動エネルギーを求めよう.

衝突

短時間だけ内力がはたらく出来事.

高木 II §9.2 衝突の前後でも, もちろん運動量保存則は成立する.

運動エネルギーが保存することもある (完全弾性衝突)

しない場合 (非弾性衝突) は, 熱エネルギーなどに転換されている.

1 次元の衝突の例

保存則だけによる解析

x 軸上を運動する質量 m_1, m_2 の物体. 外力なし.
衝突前の速度 v_1, v_2
衝突後の速度 v'_1, v'_2 大注意. さっきと ′ の意味が違う

運動量保存則 これはいつでも成立

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{う}$$

運動エネルギーの変化量が ΔK

($\Delta K = 0 \Leftrightarrow$ 運動エネルギーが保存 $\Leftrightarrow$ 完全弾性衝突)
重心座標+相対座標で書いて,
$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{m_1 + m_2} = V'$
$v = v_2 - v_1,\ v' = v'_2 - v'_1.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + \Delta K &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2}\mu v'^2. \qquad \text{(え)} \\ \Delta K &= \frac{1}{2}\mu (v'^2 - v^2) \\ &= \frac{1}{2}\mu (e^2 - 1) v^2. \end{aligned}$$

ここで衝突前後の相対速度の絶対値の比を

$$\text{反発係数}\quad e = \frac{|v'|}{|v|} = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|}.$$

とおいた.

反発係数 $e = 1 \Leftrightarrow$ 運動エネルギー保存 $\Delta K = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{完全弾性衝突}}$

反発係数 $e \neq 1 \Leftrightarrow$ 運動エネルギー非保存 $\Delta K \neq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{非弾性衝突}}$

一直線上の 2 体の衝突

2 物体の x 軸上の衝突後の速度は

- 運動量保存則
- 衝突前の速度
- 反発係数 e の値

から完全に定まる (運動方程式を解かなくても求められる)

2 次元以上では保存則だけからは定まらない.

Quiz 3

質量 $m_1 = m_2 = m$ の 2 物体が, x 軸上を運動して衝突した. 初速は $v_1 = 1, v_2 = 2$ だった. 次の 2 つの場合に, 衝突後の 2 物体の速度を求めよう.

1. 完全弾性衝突のとき
2. 衝突後に 2 つの物体が合体してしまったとき

教科書のお奨め問題

高木 II 演習問題 [1][2][3](p.52)

2010-07-17 土 たぶん補講

2010-07-21 水 たぶん休講