数値計算法☆演習ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-07-30 Thu 更新: Time-stamp: "2010-08-03 Tue 20:11 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

1. 外部記憶ペーパー作成 10 分, 答案作成 80 分.
2. 要過程 の問は過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

要過程 定積分

$$\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

の近似値を, 分割数 $N = 4$ の台形公式による数値積分で求めよう.

2

要過程 定積分

$$\int_1^5 x \cdot 2^x\,\mathrm{d}x$$

の近似値を, 分割数 $2N = 4$ のシンプソン公式による数値積分で求めよう.

3

次の 5 個のデータの平均, 分散, 標準偏差を求めよう. (他の統計の授業もうけている人への注意: 分散とは, 標本分散, 不偏分散などとも言われるものです. 標準偏差も同様.)

$$-2, +5, -10, 0, +2.$$

[1]Copyright ©2010 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

$\boxed{\text{要過程}}$ 次の 2 変量データの相関係数を求めよう.

x	5	9	7	1	3
y	10	6	2	-2	-6

5

方程式 $\cos x = 0$ の数値解を 2 分法で求めることを考える.

1. 区間 $(0, 8)$ に含まれる真の解をすべて求めよう.
2. 初期区間を $(a_0, b_0) = (0, 8)$ とするとき, (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ を求めよう.
3. 初期区間を $(a_0, b_0) = (0, 8)$ とするとき, 最終的に求まる数値解 x を答えよう.

6

$\boxed{\text{要過程}}$ 次の連立 1 次方程式を, 前進消去だけからなる Gauss-Jordan の消去法 (計算機用) で解くときの拡大係数行列の変形の過程を書こう. 変形の名前や理由は書かなくていいが, 人間用のアルゴリズムとの違いがわかる程度に詳しく書こう. また, 選んだピボットを丸で囲んで示そう.

$$
\begin{aligned}
y + z &= 2 \\
2x + 4y + 2z &= 6 \\
x + 4y + 2z &= 5
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{続きます}}$

7

A を 5×5 行列とする. 次のプログラム内で, 関数 f は, 任意の 5 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ を引数として与えられたとき, ベクトルの絶対値 (長さ) $|\boldsymbol{v}-A\boldsymbol{v}|$ を計算して返すものである (d に絶対値が代入される). f を適切に定義しよう.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double v[]);

int n=5;
double A[][5]={{1.0,2.0,3.0,2.0,4.0},
               {3.0,8.0,3.0,8.0,4.0},
               {1.0,2.0,6.0,2.0,4.0},
               {9.0,8.0,3.0,8.0,6.0},
               {1.0,2.0,4.0,2.0,4.0}};

int main(void){
  double d;
  double v[]={1.0,2.0,3.0,2.0,3.0};

  d=f(v);
  printf("%f\n",d);
  return;
}

double f(double v[]){
  /* ここをうめてね(ここだけ答えればいい) */
}
```

8

方程式

$$\mathrm{e}^x=\log x+3$$

の解を, Newton 法で数値的に求めるプログラムを書こう.

Newton 法の定める数列を $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ とするとき, 初期値は $x_0=1$ ととろう. 誤差 $|x_n-x_{n-1}|$ が 10^{-6} より小さくなったら x_n を出力して終了するようにしよう. 収束性や解の存在や個数などは気にしなくてよい.

9

次の漸化式で定まる数列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ を考える.

$$x_0=1,\quad x_{n+1}=2\cos(x_n)\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

正の整数 n を入力すると, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ を計算して出力するプログラムを書こう. 数値計算誤差のことは気にしなくてよい.

10

次のプログラムに正の整数 n を入力した時の出力を, n の関数として答えよう. (もちろん出力は double の数値だが, ふつうの数式を答える)

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void){
  double x;
  int i,n;

  scanf("%d",&n);

  x=0.0;
  for(i=0;i<=n;i++){
    x=x+3.0*pow(0.5,i);
  }
  printf("%f\n",x);
  return;
}
```

数値計算法☆演習ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2010-07-30 Thu 更新: Time-stamp: "2010-08-03 Tue 20:11 JST hig"

配点 10 点 ×10 問.

1

刻み幅は $h=\frac{1}{6}\pi$. $f(x)=(\sin x)^{-4}$ とすると,

$$
\begin{aligned}
&h\times[\tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{6}\pi)+f(\tfrac{2}{6}\pi)+f(\tfrac{3}{6}\pi)+f(\tfrac{4}{6}\pi)+\tfrac{1}{2}f(\tfrac{5}{6}\pi)]\\
=&\tfrac{1}{6}\pi\times(\tfrac{1}{2}\cdot 2^2+\tfrac{2^2}{3}+1+\tfrac{2^2}{3}+\tfrac{1}{2}\cdot 2^2)=\tfrac{(6+4+3+4+6)\pi}{18}=\tfrac{23\pi}{18}=4.01426\cdots.
\end{aligned}
$$

Remark 真の値は $2\sqrt{3}$. $f(x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$ という対称性を使うと, 分割数 $N=4$ でもっと正確に求められる. ただし, 人間がまねようとすると, 半角公式などを使って $\sin\frac{5}{12}\pi$ を求めることが必要になる.

配点 N の正しい公式に 4 点, 正しい刻み幅と分点に 3 点, 最終的な結果に 3 点

2

$N=2,4$ 分割の台形公式による近似 S_2, S_4 は

$$
\begin{aligned}
S_2&=2[\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^1+3\cdot 2^3+\tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^5]=210.\\
S_4&=1[\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 3^1+4\cdot 2^4+2\cdot 3^4+\tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2^5]=177
\end{aligned}
$$

よって $2N=4$ 分割のシンプソン公式による近似は

$$T_4=\frac{4S_4-S_2}{3}=166.$$

Remark 真の値は $-\frac{30}{\log 4}+\frac{158}{\log 2}=165.505\cdots$.

配点 S_4, S_2 に各 2 点. 補外の式に 3 点, 最終的な結果に 3 点

[2]Copyright ©2010 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

平均 $\mu = \frac{1}{5}((-2)+(+5)+(-10)+0+(+2)) = -1$
分散 $\sigma^2 = \frac{1}{5-1}((-2+1)^2+(+5+1)^2+(-10+1)^2+(0+1)^2+(+2+1)^2) = \frac{1}{4}(1+36+81+1+9) = 32.$
標準偏差 $\sigma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

配点　平均, 分散 4 点. 標準偏差 2 点.

4

x, y それぞれの平均は $\mu_x = 5, \mu_y = 2.$
相関係数は

$$r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{5}(y_j-\mu_y)^2}} = \frac{48}{\sqrt{40}\sqrt{160}} = 0.6$$

配点　相関係数の式が正しく使えることに 4 点, いずれかの分散が求まっていることに 3 点, 最終的な値に 3 点.

講評　公式はいくつかの形があって, 確かに複雑だけど, 外部記憶ペーパーがあるんだから正しく計算できるようになろう.

5

1. $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi.$
2. $(a_1, b_1) = (0, 4), (a_2, b_2) = (0, 2), (a_3, b_3) = (1, 2), \ldots.$
3. 求まる解は $x = \frac{1}{2}\pi(= 1.57\cdots)$

配点　1. 3 個の解に各 1 点. 2. 3 ステップに各 2 点. 3. 1 点.

講評　$\frac{n}{2}\pi$ の値の計算はややこしいかな〜と思いつつ出題した問題だけど, そこじゃないポイントで間違ってる人が多い. 問題文をよく読もう. 1. 高校レベルの問題. 2. たしかにちょっと面倒. 3. 2 分法はほぼ必ず収束するわけで, それは 1 の答のうちのどれかで, 2 の区間 (a_3, b_3) に含まれるもののはず. そういう関係が成立してない答をした人は, 2 分法を正しく理解できてないと思った方がいい.

6

$$
\begin{pmatrix} 0&1&1&2\\ 2&4&2&6\\ 1&4&2&5 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{swap}(0,1),\text{multiply}(0,0.5)}
\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 0&1&1&2\\ 1&4&2&5 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{add}(0,0,1),\text{multiply}(0,-1,2)}
\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 0&1&1&2\\ 0&2&1&2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{swap}(1,2),\text{multiply}(1,0.5)}
\begin{pmatrix} 1&2&1&3\\ 0&1&0.5&1\\ 0&1&1&2 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{add}(1,-2,0),\text{add}(1,-1,2)}
\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0.5&1\\ 0&0&0.5&1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{multiply}(2,2),\text{add}(2,-0.5,1),\text{add}(2,0,0)}
\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&2 \end{pmatrix}
$$

よって $x = 1, y = 0, z = 2$.

配点　部分ピボット選択に 2 点 ×2 か所, 前進消去で上三角部分も 0 にすることに 4 点, 指定の方法でなくても正しい手順で正しい答えを出してることに 2 点.

講評　人間用の Gauss-Jordan の消去法を使っている人, 前進消去後退代入でやっている人も多数. この問題できないと課題 E131 はできないと思うよ〜

7

```
double f(double v[]){
  /* ここをうめてね(ここだけ答えればいい) */
  double w[5]; /* Av を代入 */
  int i,j;
  double sum;

  for(i=0;i<n;i++){
    w[i]=0.0;
    for(j=0;j<n;j++){
      w[i]+=A[i][j]*v[j];
    }
  }

  sum=0.0;
  for(i=0;i<n;i++){
    sum+=(v[i]-w[i])*(v[i]-w[i]);
  }

  return sqrt(sum);
}
```

配点　行列とベクトルの積に 4 点, ベクトルの差の絶対値に 4 点, プログラム全体の整合性に 2 点.

講評　$A\boldsymbol{v}$ の計算は課題 E121 そのもの. $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}|$ の計算は E122 の終了条件. あとはつなげてやるだけでしょ〜 絶対値の計算が, $|(1, -2)| = 1 + 2$ とかになっちゃってる人も多数.

8

方程式は $f(x)=\mathrm{e}^x-\log x-3=0$ なので, 漸化式は $x_{n+1}=x_n-\frac{\mathrm{e}^{x_n}-\log x_n-3}{\mathrm{e}^{x_n}-(1/x_n)}$. プログラム例は略.

配点　漸化式に 4 点, 誤差による終了条件に 4 点, プログラム全体の整合性に 2 点.

講評　$f(x)$ を読み取る前に方程式を $f(x)=0$ の形に書き直そうよ. 指数表示は, d.ddE-nn で $d.dd\times 10^{-nn}$. それを $d.dd^{-nn}$ と誤解してる人がけっこういる… `x_current=x_next` 忘れてる人がときどきいました. `x_current` の値が変化しないよ〜

9

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void){
  double x;
  double sum=0.0;
  int i,n;

  scanf("%d",&n);

  x=1.0;
  sum=sum+x;
  for(i=0;i<n;i++){
    x=2.0*cos(x);
    sum=sum+x;
  }
  printf("%f\n",sum);
  return 0;
}
```

配点　x_k の計算に 4 点, σ の計算に 4 点, プログラム全体の整合性に 2 点.

講評　$x_{n+1}=2\cos(n)$ や, $x_{n+1}=x_n+2\cos(x_n)$ でやっちゃってる, x_n は求めてるけど $\sum_{i=0}^{n} x_i$ を求めてない, などのまちがいをしてる人がいました.

10

等比級数を計算するエコじゃないプログラム. 初項が $3.0\times 0.5^0=3$, 公比が 0.5, 項の個数が $i=0,1,\ldots,n$ の $n+1$ 項なので,

$$\sum_{i=0}^{n} 3(\tfrac{1}{2})^i=\frac{3(1-(\frac{1}{2})^{n+1})}{1-\frac{1}{2}}=6(1-(\tfrac{1}{2})^{n+1})$$

Remark　$n = 1, 2$ などで実際に試して検算しよう.
　等比級数の公式は m, ばっちり暗記してもいいし, 分子が怪しいときは, $n = 0$ だったら 初項 3 になるはずと思ってあわせよう.

配点　漸化式 3 点, σ を使って書いた式 5 点, 等比級数っぽく計算してあったら 8 点, 完答 10 点.

講評　何項か計算してみて予測するってのはあまり効率よくないのでは. プログラムから漸化式を写し取って, 数学のりで計算するのがいちばんだと思うよ〜