計算機で π, e, テイラー級数?

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

数値計算法 L04(2010-04-30)

今日の目標

1. 無限級数を近似的に計算できるようになろう
2. テイラー級数を有限次まで計算できるようになろう

hig3.net

テイラー級数 · マクローリン級数

マクローリン級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

こんな例 $f(x) = \arctan x = \tan^{-1} x$

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2}, f^{(2)}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \cdots,$

$f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$ より

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \boxed{}$$

円周率 π を計算する Leibniz の公式

マクローリン級数

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

Leibniz の公式

$$\boxed{} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot 1^{2k+1}$$

.

先週やった級数を無限級数 ($\sum$ の上限が $+\infty$) にしただけじゃん

Example (べき級数と $\sum$ 記号)

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{2n+1}$ の最初のほうを書こう.
2. $x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 + \cdots$ を $\sum$ を使って書こう.

無限級数で大ピ〜ンチ!

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

- 実際は $n = +\infty$ までは計算できない．それなりに大きい N でとめて，$S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n$ で満足しなければ．
- $\boxed{\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}} = S_N - S = -\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n$

対策 1 N をなるべく大きくとる → 計算時間がかかる．
対策 2 $|x_n|$ が $n \to \infty$ で急速に小さくなる級数 (収束の速い級数) を選ぶ．
例: Machin の公式 (倍角公式などで簡単に証明できる) にのりかえ．

$$\frac{1}{4}\pi = \arctan(1) = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

$(\frac{1}{5})^{2k+1}$, $(\frac{1}{239})^{2k+1}$ が出てくるので収束は速そう．

しか〜し, 収束が速すぎると大ピ〜ンチ!

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$$

収束が速いためには $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \ll 1$ だといい.

記号 $\ll, \gg$ はすごく小さい (大きい)

$S = 0$ に, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ の順に加えていく.

あれっ, この状況で $S_{N+1} = S_N + x_{N+1}$ 計算するのって危なくない?

もし $x_{N+1} \ll S_N$ だったら $\boxed{}$ が発生する危険.

不完全な対策: 弱小大名が天下をとるには?

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ の順に加えていくのでなく,

の順に加えていく.

なぜこうするといい?

この演習ではここまで気にしない.

自然対数の底 e を計算する公式

あんな例 $f(x) = e^x$

$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$ **より**,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

よって自然対数の底 e **は**,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

と書ける.

e を計算するモッタイナイプログラム

```c
#include <stdio.h>

int factorial(int n);

int main(void){
    int nmax=20; /* N */
    double s=0.0;

    for(n=0;n<=nmax;n++){
        s=s+1.0/factorial(n);
    }
    printf("%f\n",s);
    return 0;
}

int factorial(int n){
    /* 略. 階乗を求める, return n!; */
}
```

e を計算するややエコなプログラム

$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$, 漸化式 $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n/(n+1)$ を考えて,

```
#include <stdio.h>

int main(void){
    int nmax=20; /* N */
    double x=1.0;
    double s=0.0;

    s=x;
    for(n=1;n<nmax;n++){
        x=x/(n+1);        /* x = 1/(n+1)! */
        s=s+x;
    }
    printf("%f\n",s);
    return 0;
}
```

同じ. を節約.

マクローリン級数, テイラー級数の計算

マクローリン級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

c_n は簡単に計算できるとすれば, $f(2.0)$ を $N = 20$ までで求めるのは次のような簡単なプログラム.

マクローリン級数とは限らない $\boxed{\text{べき級数}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

の計算に使える.

Example (べき級数と $\sum$ 記号)

1. $\sin x$ のマクローリン級数を求めよう.

```c
#include <stdio.h>

double ipow(double x, int n); /* x^n */

int main(void){

    int nmax=20; /* N */
    double x=2.0; /* x */
    double s=0.0; /* S_N */

    for(n=0;n<=nmax;n++){
        s=s+c_n * ipow(x,n);
/* c_n は具体的な式に置き換え */
    }
    printf("%f\n",s);
    return 0;
}

/* x^n を計算する関数.
もっと効率を上げられる */
double ipow(double x, int n){
    double prod=1.0;
    int i;
    for(i=1;i<=n;i++){
        prod=prod*x;
    }
```

x^y **を計算するのに** `double pow(double x, double y)` **を使おうとする人が多いが, 大注意.** y **が (小さい) 自然数 (例**:2,3,4,. . .) **の時は,** y **回乗算するほうがまし.**
繰り返し使うなら配列に表を作って引く.

べき級数を計算するまあまあエコなプログラム

べき級数

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$$

は, 次のような漸化式で書き換えられる.

$$b_0 = 1, b_{n+1} = b_n x$$

ここで, 内心 $b_n = x^n$ だと思っている.

```
#include <stdio.h>

int main(void){

    int nmax=20; /* N */
    double x=2.0; /* x */
    double s=0.0;
    double b=1.0;

    s=s+c_0*b;
    for(n=0;n<nmax;n++){
        b=b*x;
        s=s + (c_{n+1} * b); /* c_{n+1} は具体的な式 */
    }
    printf("%f\n",s);
    return 0;
}
```

さらに, c_n も漸化式を用いて計算するとコストが削減できることがある.
$c_n = 1/n!$ みたいに.

楽しい連休計画

自宅の PC に無料で Visual C++ 2008 Express Edition をインストールして課題やり放題!!

レポート課題「VS2008 インストール報告書」

- 講義の日常活動 4 点分
- 締切 2010-05-08 土 02:00
- e ラーニングシステムに~~Word~~PDF 形式のファイルで提出.

詳しくは数値計算法☆演習の Web ページ参照

連休明け計画

もしかすると, 2010-05-07 金 1 の数値計算法 (講義) は 1-542 実習室で行うかもしれません. 2010-05-06 木 (の昼以降) に掲示とメールを確認してください.