方程式を解こう

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

数値計算法 L06(2010-05-14)

今日の目標

1. 公式のない方程式を反復法で解こう
2. 公式のない方程式を Newton 法で解こう

hig3.net

n 次方程式の解の公式

□=0 の形の方程式を□という.

1 次方程式

$$ax + b = 0 \rightsquigarrow x = -b/a.$$

2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightsquigarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

いろんな危険: overflow, underflow, 桁落ち, 情報落ち, 複素根

3 次方程式 Cardano の公式. $\sqrt[3]{\ }$ が出てくる.

4 次方程式 Ferrari の公式

5 次以上の方程式 sqrt, pow, +, -, *, / だけで (いつでも使える) 公式を書くことはできない (Galois)

n 次方程式複素数までいれて, 重根は多重度をこめて数えると必ず n 個の根を持つ.

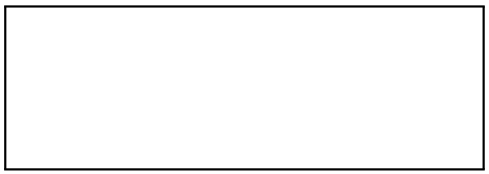
関数論 (3 年)

これが解ければ $\sqrt[n]{m}$ を数値的に求められる.

超越方程式

$\sin(x), \cos(x)$ など無限級数を含む方程式を超越方程式という.
一般には解の公式はない.

例 $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$



反復法

$$f(x) = x - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x) \quad x \text{ は } g(x) \text{ の不動点}$$
$$x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-x}$$

漸化式で定まる次の数列を考える. 栗原 §2.1

$$x_0 = \text{なるべく真の解の近く}$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ は $f(x) = 0$ の解 (収束するなら)

証明 $x_{n+1} = g(x_n)$

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n)$$

左辺 $= x_*$

右辺 $= \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to+\infty} x_n) = g(x_*).$ (g が連続なら)

収束の様子

例題

$$f(x) = x - (1 - \frac{1}{2}x) = 0$$

つまり $g(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ のときを考える. $x_0 = 4$ とするとき, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を手で求めよう.

反復法のプログラム例

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double g(double x);

int main(void){

  double x=0.5;
  int nmax=20;
  int n;

  for(n=0;n<nmax;n++){
    /*      回数 x 残差 */
    printf("%d %.14e %.14e\n",
           n,x,g(x)-x);
    x=g(x);
  }
  return 0;
}

double g(double x){
  return exp(-x);
}
```

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double g(double x);

int main(void){
  double x_current=0.5;
  double x_next;     /* x */
  double eps=1.0e-14;
  int n=1;
  while(1){
    /*      回数 x 誤差 残差 */
    x_next=g(x_current);
    printf("%d %.14e %.14e %.14e\n",
 n,x_next,x_next-x_current,g(x_next)-x_next);
    if( fabs(x_next-x_current)<eps){
      break;
    }
    n++;
    x_current=x_next;
  }
  return 0;
}

double g(double x){
  return exp(-x);
}
```

終了条件

- n が 反復の上限 N に達した.
- 残差 $|f(x_n)| = |x_n - g(x_n)|$ が δ より小さくなった.
- 誤差 $|x_{n+1} - x_n|$ が ϵ より小さくなった.

x_{n+1} =x_next,x_n =x_current の両方を記憶する必要.

$f(x) = x - F(x) = 0$ という形じゃないとき

例: $f(x) = x^2 - \mathrm{e}^{-x} = 0$.
強引な変形 $f(x) = x - [x - f(x)] = x - [x - (x^2 - \mathrm{e}^{-x})] = 0$.
したがって, 漸化式 $x_{n+1} = g(x_n) = [x_n - f(x_n)]$ を使えばいい.
ちょっと勝手すぎない?

$f(x) = Ax - [Ax - f(x)]$ とも思える.
$\frac{1}{A}f(x) = x - [x - \frac{1}{A}f(x)] = 0$ を解いてもいいわけで, 漸化式は
$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{A}f(x_n)$ でもいい.

だって, 解は同じでしょ〜

反復法の失敗する場合

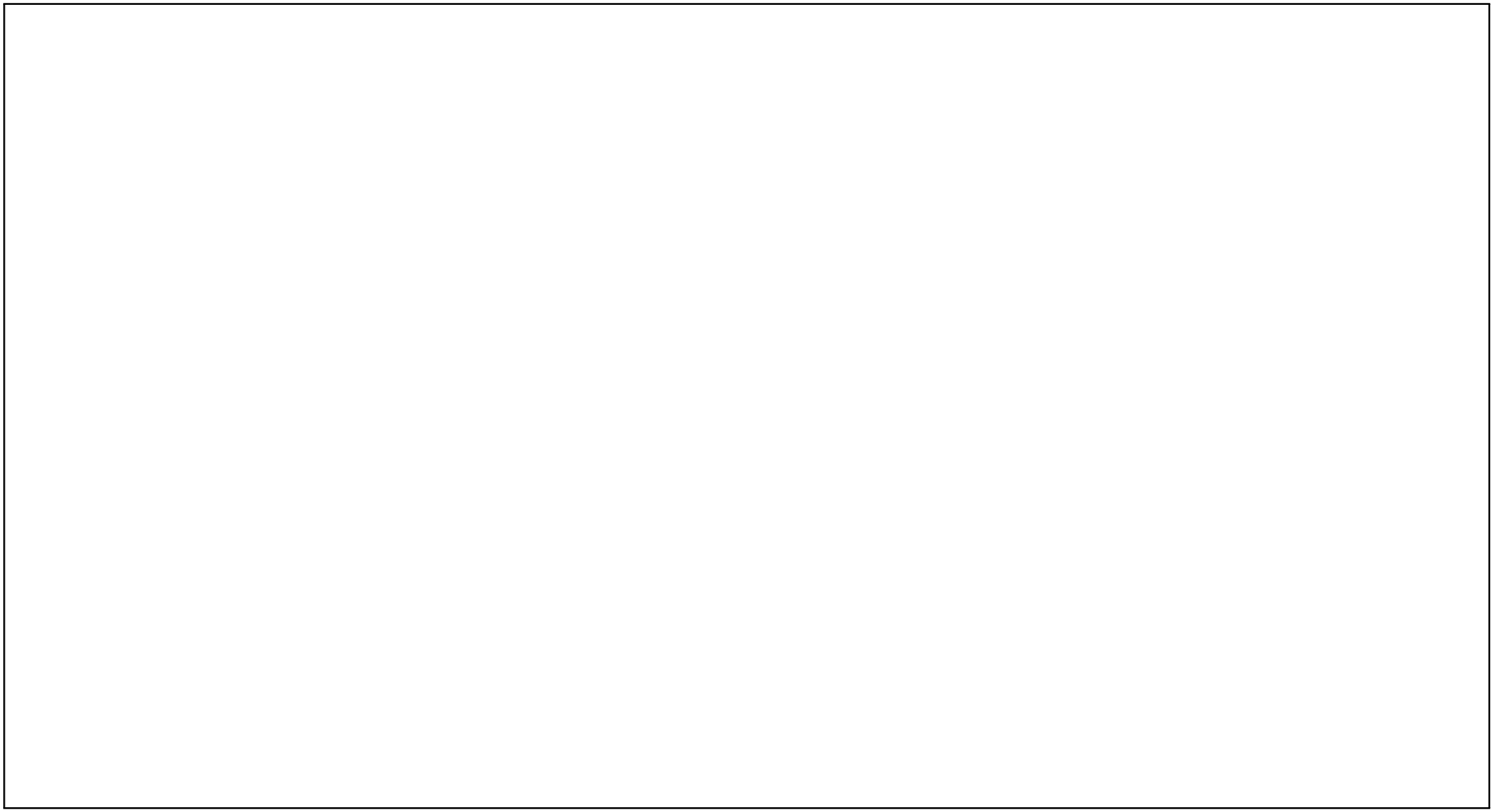
初期値の運勢による失敗もある. その話はおいておこう.

$f(x) = x - 3\mathrm{e}^{-x} = 0$ を考えよう.
$g(x) = [x - \frac{1}{A}f(x)] = [x - \frac{1}{A}(x - 3\mathrm{e}^{-x})]$. すなおに $A = 1$.
この数列は真の解に収束しない.

一般に, $|g'(x_*)| > 1$ だと発散. x_* は求めたい解.

$|g'(x_*)| =$  となるように A を調節.

発散の様子



もっといい方法:Newton 法

栗原 §2.3

$$x_0 = \text{なるべく真の解の近く}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Newton 法のプログラム例

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double g(double x);

int main(void){

  double x_current=0.5;
  double x_next;
  double eps=1.0e-14;

  int n=1;

  while(1){
    /*      回数 x 誤差 残差 */
    x_next=g(x_current);
    printf("%d %.14e %.14e %.14e\n",n,x_next,x_next-x_current,g(x_next)-x_next);

    if( fabs(x_next-x_current)<eps){
      break;
    }
    n++;
    x_current=x_next;
  }
  return 0;
}

double g(double x){
  /* x-f(x)/f'(x) */
  return x-(x-3.0*exp(-x))/(1.0+3.0*exp(-x));
}
```

Newton 法の計算例

例題

$f(x) = x^2 - 2 = 0$ を考える.

1. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ に相当する漸化式を書こう.
2. $x_0 = 2$ として, x_1, x_2 を手で求めよう.

プチテストやります!

日時　2010-05-28 金 1 講時

範囲　2010-05-14 金までの講義・演習の内容 (大注意: 2010-05-21 金 は全学休講)

配点　科目の成績 100 点中~~40~~30 点. ファイナルトライアルを 50 点にします. 理由: 13 回中 6 回分だし, 課題が完結していない分もあるし, 教育実習の人もいるし.

出題ののり　範囲の 6 回の講義からなるべく均等に出題する予定. 半分程度は quiz を再現するような問題の予定. 2010-05-14 ごろに, シミュレーション問題を模範解答を作ろうプロジェクトとして出題するかも.

欠席者　追試はやらない予定. 出席できない人 教育実習や介護実習で出席できない人は点数換算で不利にならないように考慮します. 6 月末までに, 理由を証明する書類 (コピー可) を添えて, 教務課で配布している欠席届の用紙に記入して提出してください.

その他のお知らせ

Quiz 2010-05-28, 2010-06-04 には行いません.
予習復習問題 上記の Quiz のかわりに, e ラーニングサイトに予習復習問題を置きます. 2010-05-17–2010-05-21 の期間に '受験' してください. (力学ののりで)
プチテストシミュレーション問題 e ラーニングサイトに予想問題を置くかもしれません. その時にはフォーラムに投稿してメールで連絡します.
楽しい連休計画の結末
レポートの評価ちょっと待ってね. 失敗の理由もわかる範囲でコメントする予定.
他の人のレポート見られます. 自分のインストールが完成しなかった理由のヒント得られるかも.