台形公式で数値積分

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

数値計算法 L08(2010-06-11)

今日の目標

1. 区分求積法で数値積分するプログラムが書けるようになろう.
2. 台形公式で数値積分するプログラムが書けるようになろう.

hig3.net

数値微分

$f(x)$ が簡単でないときも, $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を求めたい.

例. $g(x) = \cos x$, $f(x) = g(g(g(g(g(g(g(g(x))))))))$

$f'(a)$ の $\boxed{\text{離散化}}$

微分 $f'(a) \leftrightarrow$ ［ ］ $\Delta f = f(a+h) - f(a)$. 栗原 p.109

1. 前進差分商 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
2. 後退差分商 $\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$
3. 中心差分商 $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

計算式はいくつも考えられるが, $h > 0$ ではどれも $\boxed{\text{離散化誤差}}$ がある.
$h \to 0$ ではどれも真の値と一致すると期待される.
微分方程式を計算機で解こう!

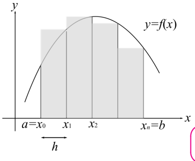
計算科学・演習 I(2 年後期)

定積分の定義

定積分の定義

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (y=0,\ y=f(x),\ x=a, x=b \text{ に囲まれた部分の面積})$$

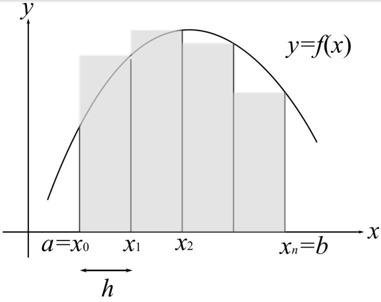
- 原始関数 F $(F'=f)$ を利用した $[F(x)]_a^b$ というのは，ラッキーなら使えることもある計算テクニックにすぎない．
- $F(x)$ を求めることができないこともある．例 e^{-x^2}．



栗原 §5.1

区分求積法による定積分 (面積) の定義

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\times h$$



- n 分割数
- $h=(b-a)/n$ 刻み幅
-

区分求積法のプログラム例

こんな級数, プチテストの問 6 程度じゃん.

```
double f(double x); /*被積分関数*/

int main(void){
  double a=(); /* 下端. 与える. */
  double b=(); /* 上端. 与える. */
  double n=(); /* 分割数. 与える. */
  double h;    /* 刻み幅 */

  int j;
  double sum=0.0;

  h=(b-a)/n;
  for(j=1;j<=n;j++){     /* n分割 */
    sum+=f(a+j*h); /* f(x_j) */
  }
  sum=sum*h;
  printf("%f\n",sum);
}
```

Quiz (区分求積法)

定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$ を, 分割数 $n=2,4$ の区分求積法で求めよう.

数値計算上のアドバイス

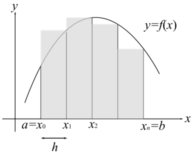
刻み幅 $h=$ 整数$/2^m$ だといいな〜 そうでないと h に丸め誤差がでる. n 回も使うから誤差が累積する.

このアルゴリズムへの疑問

- なぜ $j = 0, 1, \ldots, n-1$ じゃなくて $j = 1, 2, \ldots, n$ なの?
  非対称!
- 一般に, j 枚目の長方形は,

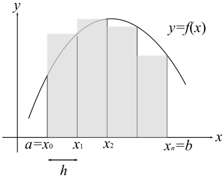
$$f(mx_{j-1} + (1-m)x_j) \times h$$

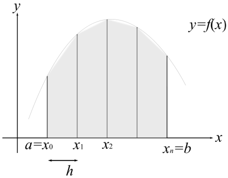
(区間 (x_{j-1}, x_j) を $m : 1-m$ に内分) でいいのに, わざわざ右端 $m = 1$ にとってる. Why?



長方形よりも台形

j 枚目の長方形=横 × 縦=$f(x_j) \times h$ または $f(x_{j-1}) \times h$
j 枚目の台形=$\frac{1}{2}$(上底+下底)× 高さ $= \frac{1}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j)) \times h$. 栗原 §5.3





$$
\begin{array}{llllll}
[\frac{1}{2}f(x_0) & +\frac{1}{2}f(x_1) & & & & \\
 & +\frac{1}{2}f(x_1) & +\frac{1}{2}f(x_2) & & & \\
 & & +\frac{1}{2}f(x_2) & +\frac{1}{2}f(x_3) & & \\
 & & & \vdots & & \\
 & & & +\frac{1}{2}f(x_{n-2}) & +\frac{1}{2}f(x_{n-1}) & \\
 & & & & +\frac{1}{2}f(x_{n-1}) & +\frac{1}{2}f(x_n)] \times h
\end{array}
$$

$$
= [\frac{1}{2}f(x_0) + \sum^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}(x_n)]h
$$

数値積分の台形公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(x_n)\right] \times h$$
$$= \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(a+jh) + \frac{1}{2}f(b)\right] \times h$$

- n 分割数
- $h = (b-a)/n$ 区間幅
- $x_j = a + jh$ 分点
- それでも離散化誤差

ほとんどそのままプログラムできるでしょ．

Quiz (台形公式)

定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$ を, 分割数 $n = 2, 4$ の台形公式で求めよう.

区分求積法の誤差評価

刻み幅 $h(\to 0)$ のとき誤差はどのくらい?

$x \in (x_{j-1}, x_j)$ のとき, 栗原 §5.6

- 真の関数 $f(x)$.
- 近似の関数 $g(x) = f(x_j)$ (定数関数)

$$
\begin{aligned}
\text{縦のずれ} =& |f(x) - g(x)| \\
=& |[f(x_j) + a_1(x - x_j) + a_2(x - x_j)^2 + \cdots] - [f(x_j)]| \\
=& |a_1(x - x_j) + \cdots| \\
<& A \times h. \qquad (A \text{ は定数})
\end{aligned}
$$

定積分の誤差 $< \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Ah \times h = \frac{b-a}{h} \times Ah \times h = Bh.$ よって誤差は

.

台形公式の誤差評価

$x \in (x_{j-1}, x_j)$ のとき,

- 真の関数 $f(x)$.
- 近似の関数 $g(x) = f(x_j) + \frac{f(x_j) - f(x_j - 1)}{x_j - x_{j-1}} \times (x - x_j)$ (1 次関数)

$$
\begin{aligned}
\text{縦の誤差} =& |f(x) - g(x)| \\
\simeq& |[f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + a_2(x - x_j)^2 + \cdots] - [f(x_j) + f'(x_j)(\\
=& |a_2(x - x_j)^2 + \cdots| \\
<& Ch^2.
\end{aligned}
$$

定積分の誤差 $< \displaystyle\sum_{j=1}^{n} Ch^2 \times h = \frac{b-a}{h} \times Ch^2 \times h \times < Dh^2$. 誤差は

台形公式の漸増法

分割数 n での台形公式による近似.

$h = \frac{b-a}{n}$.

$$S_n = [\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x+jh) + \frac{1}{2}f(b)] \times h.$$

分割数 $2n$ での台形公式による近似.

$h' =$

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{2n-1} f(x+jh') + \frac{1}{2}f(b)\right] \times h' \\
&= \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x+(2k)h') + \sum_{k=1}^{n} f(x+(2k-1)h') + \frac{1}{2}f(b)\right] \times h' \\
&= \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x+(k)h) + \frac{1}{2}f(b)\right] \cdot \frac{h}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n} f(x+(2k-1)h')\right] h' \\
&= \frac{1}{2}S_n + \sum_{j=1,3,5,\dots,2n-1} f(x+jh')h'
\end{aligned}$$

台形公式の漸増計算

栗原 §5.5

漸増計算の漸化式

S_n: n 分割での台形公式による近似値は, 次の漸化式で求められる.

$$S_{2n} = \frac{1}{2}S_n + \sum_{j=1,3,5,\ldots,2n-1} f(x+jh')h'$$

上の公式を使って $S_1, S_2, S_4, \ldots$ と計算していって, だんだん正確にしていける. 誤差の評価値 $|S_{2n} - S_n|$ が指定の値より小さくなったらそこでやめる.

Quiz

台形公式の S_4 を S_2 から漸増計算で求めよう．前と一致してる？

お知らせ

1. 自宅の個人 PC に Visual C++ (Studio) 2008/2010 をインストールしたけどうまく使えない, という質問を何回かいただいています. 困った状態のスクリーンショットを添付してメールで問い合わせてくれたら, 解決できるかもしれません.
2. これまでの演習問題のうち何個かの解答プログラム例を公開しています. 演習問題のページからどうぞ.
3. 演習:質問予約の順位決定ポリシー変更してます (実験)
4. プチテストの略解公開してます.