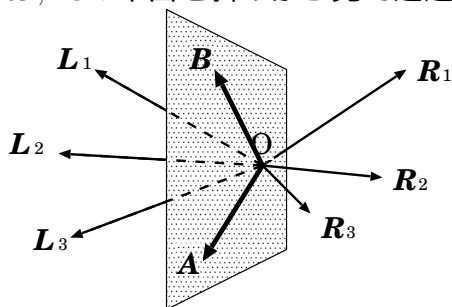


注意 **両面です. 全部で3問です.** 以下の問題で, x, y, z 座標系は右手系 (ふだん通り) です. x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトルの記号として, i, j, k をつかってよいです.

1

x, y, z 軸の正の向きの基本ベクトルを i, j, k とする. ベクトル $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} +3 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする.

1. A の向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $A \times B$ を求めよう.
3. $A \cdot B$ を求めよう.
4. $B \times (B \cdot A)$ を求めよう.
5. ベクトル A, B の両方がのっている平面は1つだけある (図では薄く塗られている.) 下の図は, その平面を斜めから見て遠近法で描いたものである.



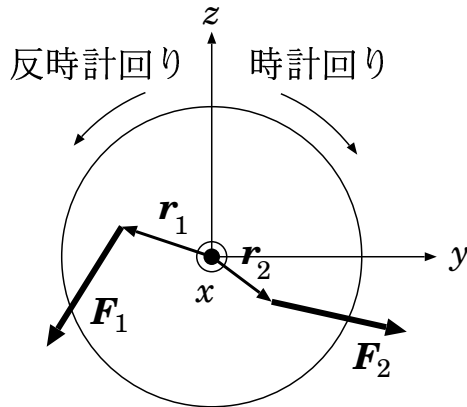
ベクトルがこの平面のどちら側を向いているかについて, L_1, L_2, L_3 のようなベクトルを左向き, R_1, R_2, R_3 のようなベクトルを右向きということにする.

ベクトル $p = \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は右向きか左向きか答えよう.

¹Copyright ©2004 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

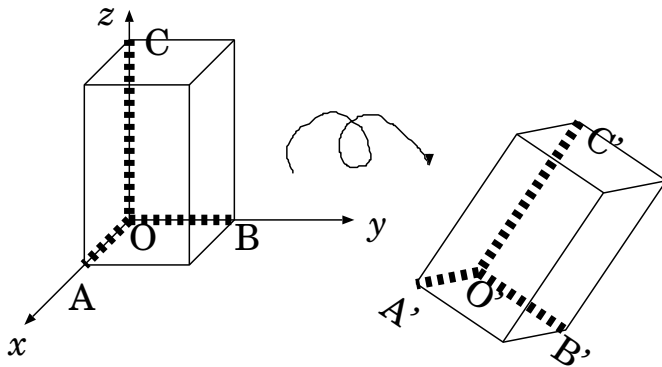
2

- ベクトル $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に平行な線路に列車がのっており、列車はこの線路上だけを動くことができる。列車に2つの力 $F_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を加えた。列車は A の向きに動くか、それとも $-A$ の向きに動くか、それとも動かないか、答えよう。
- x 軸に平行な回転軸のまわりに自由に回転できる円板がある。円板の $r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の位置に力 $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、 $r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ の位置に力 $F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を加えた。車輪が時計回りに回るか、それとも反時計回りに回るか、それともどちらにも回らないか、答えよう。
なお、図は正確ではありません。



3

- OA, OB, OC を3辺 (長さはそれぞれ $|\vec{OA}| = 2$, $|\vec{OB}| = 3$, $|\vec{OC}| = 2\sqrt{5}$) とする直方体が、図のように原点に置かれていた。この直方体を曲げたり壊したりせずに、空中に投げたところ、ある瞬間に、 $\vec{O'B'} = \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{O'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ となっていた。この瞬間の $\vec{O'A'}$ を求めよう。
なお、図は正確ではありません。



物理数学 演習I²春のプチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2004年05月19日樋口さぶろお³

1

1. $\frac{1}{|A|}A = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $A \times B = \begin{pmatrix} -6 \\ +6 \\ -3 \end{pmatrix}$.
3. $A \cdot B = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -2$.
4. $B \times (B \cdot A) = B \times (-2) = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ +4 \end{pmatrix}$. この式では, \times はベクトルとスカラーの間にあるので, ベクトルのスカラー倍を意味している.
5. 図より, 右向きであるとは, $\langle B, A, p \rangle$ が右手系であること, すなわち,

$$(1) \quad B \cdot (A \times p) > 0$$

と同じ ($\langle A, B, p \rangle$ が左手系であることとも同じ) 右手系左手系は, スカラー 3 重積の符号で判定できる. ここで,

$$(2) \quad B \cdot (A \times p) = p \cdot (B \times A) = -p \cdot (A \times B) = - \begin{pmatrix} +2 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ +6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 > 0.$$

よって, $\langle B, A, p \rangle$ が右手系で, p は右向き.

あるいは, $-A \times B$ は平面に垂直で右向きのベクトルなので, p と $-A \times B$ のなす角 θ が $\pi/2$ より小さいという条件から導いてもよい.

2

1. 合力は $F = F_1 + F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. また, A の向きの単位ベクトルは $u = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. $F \cdot u = \frac{3}{\sqrt{5}} > 0$ より, F の A 向き成分は正である. よって, A の向きに動く.
2. 力のモーメントの和は

$$(3) \quad N = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これは紙面奥向きのベクトル. この向きに進む右ねじの回る向きに, 円板は回るから, 時計回りに回る.

3

左の図から, $\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} \rangle$ は右手系をなす. よって, 右の図でも, $\langle \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}, \overrightarrow{O'A'} \rangle$ は右手系をなす. したがって, $\overrightarrow{O'A'}$ は, $\mathbf{v} = \overrightarrow{O'B'} \times \overrightarrow{O'C'} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ と同じ向き. $O'A'$ は長さ 2 だから,

$$(4) \quad \overrightarrow{O'A'} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{180}} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times 2 = \frac{2}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

¹Copyright ©2004 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

²<http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/>

³<mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

講評と感想

1

完璧にできてほしい基本的な問です.

- 1.
- 2.
- 3.
4. だまされてはいけません. これはスカラー 3 重積ではないので, スカラー 3 重積 (cyclic にまわしてよいなど) を使ってはいけません. また, $A \cdot B = +B \cdot A$, $A \times B = -B \times A$ です.

2

1. $F_1 \cdot u > F_2 \cdot u$ という理由は変です. この2つは同じ向きを正として測った量なので, $F_1 \cdot u + F_2 \cdot u$ の符号で判定すべきです.
2. $N = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2$ を使う以外の方法はほとんどないでしょう. また, $r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = -(F_1 \times r_1 + F_2 \times r_2)$ なので順序まで正しく覚えなければいけません.

3

(1) 方向を正しく求めること, (2) 向きを正しく求めること, (3) スカラー倍して正しい長さにする, の3つが必要です.

(1) は $\overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A'} \cdot \overrightarrow{O'C'} = 0$ を解くことによっても求められます. $\overrightarrow{O'A'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times a$ (a はスカラー) のような答がでるはずですが, ここで, $|\overrightarrow{O'A'}| = 2$ から, $a = \pm \frac{2}{3\sqrt{5}}$ まで求めますが, \pm のどちらをとるかは, たとえばスカラー 3 重積を計算して, もとのまま右手系であることから定める必要があります.

また, 略解のように $\overrightarrow{O'B'} \times \overrightarrow{O'C'}$ を考えれば, 直接, $\overrightarrow{O'A'} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times a$, ($a > 0$) まで求められます.

物理数学 演習I春のプチテスト参加案内

樋口さぶろお⁴ 配布: 2004年05月19日更新: Time-stamp: "2004/05/25 Tue 20:14 hig"

1. 座席指定にご協力ください.
2. 参照なしです.
3. 解答用紙1枚に1問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
4. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
5. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
6. 答案の扱いについて, 次の2つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
 - (a) 1-508 前引き出しで答案を返却する (第三者が点数を見る可能性がある).
 - (b) 答案を廃棄し, 返却も公開もしない.
7. 出席チェックするので学生証を机の上に出してね.
8. 携帯電話は (時計としても) 使わないでね.

答案の返却

答案の返却は 2004/05/26(水) 以降です.

この試験の成績は, 科目の成績 100 点中 15 点分です.

各自の点数は, 採点后, 生協メール (アドレス t040nnnx@ryukoku-u.jp) で個別にお知らせします. 携帯メールなど, 他のアドレスで受け取りたい人は, ページ

<http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html>

(<http://hig3.net> からも行けます) の説明にしたがって, あらかじめ転送設定しておいてください.

⁴Copyright ©2004 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

<http://hig3.net/>(講義のページもここからたどれます), <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,
<mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, tel:0775437501 数理情報学科へや:1号館5階508.