物理数学☆演習 I 夏のプチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2004 年 06 月 23 日更新: Time-stamp: "2005/06/23 Thu 14:41 hig"

注意 **両面です．全部で 3 問です．60 分間.** 以下の問題で, x, y, z 座標系は右手系 (ふだん通り) です. x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトルの記号として, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をつかってよいです.

1

東向きを x-軸の正の向き, 北向きを y-軸の正の向き, 上向きを z-軸の正の向きとする.
質量 $m = 2$ の物体が, 時間帯 $t > 0$ に, 力 $\boldsymbol{F}(t)$ を受けて運動している. 時刻 t における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ とする. 時刻 t における物体の速度は,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2-12 \\ 8t^3-16 \\ \frac{1}{t}-1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

である. また, 時刻 $t = 1$ における物体の位置ベクトルは $\begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}$ である.

1. 時刻 t における力 $\boldsymbol{F}(t)$ を求めよう.
2. 時刻 t における位置 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよう.
3. 時刻 $t = 1$ から 時刻 $t = 2$ までに, 物体は, 南東向きにどれだけ移動したか求めよう.
4. 北向きから東に角 $\pi/6$ だけずれた向きを, 北ちょっと東向きということにする. 時刻 $t = 1$ から 時刻 $t = 2$ までに, 物体は, 北ちょっと東向きにどれだけ移動したか求めよう.

2

物体の時刻 t における位置 $\boldsymbol{r}(t)$ は

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 - \sqrt{2}\sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

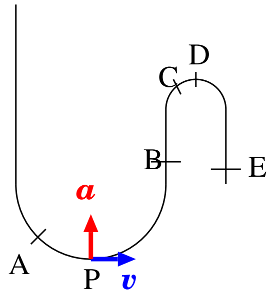
で与えられる.

1. 物体が, 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ からもっとも離れる時刻と, その時刻における距離を求めよう.
2. 物体が xz 平面を通過する時刻を求めよう.
3. 物体は, y 軸の $-1 \leqq y \leqq 0$ の部分を通過するかどうか答えよう.
4. ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と速度ベクトルのなす角が $\frac{1}{2}\pi$ より小さくなる時間帯を求めよう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

1. 下に描かれた経路の上を, それぞれ等速運動 (速さ一定の運動) する物体がある. つまり, 物体は, 等速運動している. 例として, 点 P での, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ が描かれている.
   点 A,B,C,D,E における速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を, 点 P の例のように描こう.

   注意

   - この問では理由の記述は不要です.
   - ベクトルの大きさは, 点 P の例と正しい比になってるように描いてね.
   - 零ベクトルになっている点では, 矢印のかわりに • をうってね.
   - 角度のわかるところは角度を記してね.
   - 接しているところは接しているっぽく描いてね.
   - 速度ベクトルと加速度ベクトルを区別して描いてね.

2. 物体の時刻 t における位置ベクトルを

   $$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1-4e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   とする. 時間帯 $0 \leqq t < +\infty$ における, この物体の xy 平面上の軌跡を描こう.

物理数学☆演習 I[2] 夏のプチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2004 年 06 月 23 日樋口さぶろお[3]

1

1. 運動方程式より,

$$\boldsymbol{F}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)\right) = \begin{pmatrix} 12t \\ 48t^2 \\ -\frac{2}{t^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t)$ の式を積分すると,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3-12t+D_1 \\ 2t^4-16t+D_2 \\ \log t-t+D_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

初期条件 $\boldsymbol{r}(1) = \begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}$ から積分定数 D_1, D_2, D_3 を定めると,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3-12t-4 \\ 2t^4-16t-1 \\ \log t-t-14 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

3. 南東向きの単位ベクトルは $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. よって, $(\boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(1)) \cdot \boldsymbol{u} = -\frac{19\sqrt{2}}{2}$.
4. 北ちょっと東向きの単位ベクトルは, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. よって, $(\boldsymbol{r}(2) - \boldsymbol{r}(1)) \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{5}{2} + 7\sqrt{3}$.

樋口の感想とコメント　1,2 は, 2004/06/09 の例題や quiz と同じのりの基本的な問題です.

3,4 は, これと, 2004/04/21 の例題 5 との組みあわせです.

3. で, $\sqrt{(x(2)-x(1))^2 + (y(2)-y(1))^2} = \sqrt{221}$ は正しい答ではありません. ベクトル $\begin{pmatrix} x(2)-x(1) \\ y(2)-y(1) \\ 0 \end{pmatrix}$ は, $y = -x, z = 0$ に平行でない (南東-北西方向に平行でない) からです.

4. で, 北ちょっと東向きのベクトルは三角定規からわかるはずです.

2

1. $f(t) = \left|\boldsymbol{r}(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2$ とおくと, 距離は $\sqrt{f(t)}$. もっとも離れるのは, $f(t)$ が最大になるとき. 内積を計算すると, $f(t) = 18 + 8\cos(2t)$ であり, 最大になるのは, $\cos(2t) = 1$ のとき, すなわち, $t = n\pi$(n は整数). このとき, 距離 $\sqrt{f(t)} = \sqrt{26}$.
2. xz 平面の式は $y = 0$. よって,

$$y(t) = 1 - \sqrt{2}\sin(2t) = 0 \tag{7}$$

を解いて, $t = (\frac{1}{8} + n)\pi, (\frac{3}{8} + n)\pi$ (n は整数).

---

[2]http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/

[3]mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3. y 軸の式は $x = z = 0$.

$$(8) \quad x(t) = +\cos(2t) = 0,$$
$$(9) \quad z(t) = -\cos(2t) = 0$$

を解くと, $t = (\pm\frac{1}{4} + n)\pi$ (n は整数). この時刻に y-軸を通過する. このときの y 座標を考える.

$$(10) \quad y(\pm\tfrac{1}{4}\pi + n\pi) = 1 - \sqrt{2}\sin(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi = 1 \mp \sqrt{2}.$$

ここで, $-1 \leqq 1 - \sqrt{2} \leqq 0$ なので, 問題の部分を通過する.

4. 速度ベクトルは

$$(11) \quad \boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} +2\sin(2t) \\ -2\sqrt{2}\cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ と $\boldsymbol{w}$ のなす角を θ とすると, $0 \leqq \theta < \frac{1}{2}\pi$ とは, $\cos\theta > 0$ と同じこと.

$$(12) \quad 0 < \cos\theta = \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}(t)}{|\boldsymbol{w}||\boldsymbol{v}(t)|}$$

で, 分母は常に正であることに注意すると

$$(13) \quad \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}(t) = 4\sqrt{2}\cos(2t) > 0$$

よって, $(-\frac{1}{2} + 2n)\pi < 2t < (+\frac{1}{2} + 2n)\pi$, すなわち, $(-\frac{1}{4} + n)\pi < t < (+\frac{1}{4} + n)\pi$, ($n$ は整数).

樋口の感想とコメント　1–3 は 2004/05/26 ののりです.

2. で, $2t = \frac{1}{4}\pi + 2n\pi, \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$ の両方をひろいましょう.

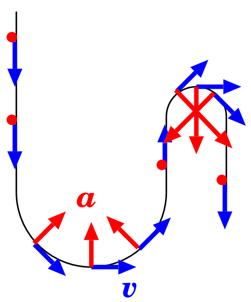
3. で, $-1 \leqq y(t) \leqq 0$ を満たす $t = T$ があるかどうかを考えるだけではいけません. これは, 平面 $y = -1$ と $y = 0$ ではさまれた, 無限に大きな厚さ 1 の板に侵入するかどうかを考えただけです. この板の中の, さらに y 軸上と言われているのですから, 同時に $x(T) = z(T) = 0$ が成立しなければいけないのです.

4 は 2004/06/16 の quiz 13 ののりです. そこでは $\pi/6$ だったのが $\pi/2$ になったのです.

4. で, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ で, $\cos 2t$ が単調減少であることに注意しましょう. この範囲で, $\theta_1 < \theta_2$ なら $\cos\theta_1 > \cos\theta_2$ です. したがって, $\theta < \pi/2$ は $\cos\theta > \cos\pi/2 = 0$ という条件になります. 向きが完全に同じなら $\cos\theta = \cos 0 = 1$ なのですから, なす角が小さいときは, $\cos\theta$ が 1 に近い値になるべきであることが想像つくでしょう.

3

1.



2. 増減表は

(14)

t	0		$\log 2$		$+\infty$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

また, t を消去すると, $y = -4x^2 + 1$. よって, 軌跡は, 放物線 $y = -4x^2 + 1$ の $0 < x \leqq 1$ の部分.

樋口の感想とコメント　1. は, 2004/06/16 の quiz11 ののりそのままです. ベクトル $\boldsymbol{v}$ はいたるところ曲線に接します. また, 等速運動なので, $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}}| = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{P}}|$ と, すべて同じ大きさになります.

等速運動なので, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0$. ベクトル $\boldsymbol{a}$ はカーブの内側向きです. また, 等速運動なので, 曲がりの急さを考えて, $|\boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}| = |\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}| = 0$. $|\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}| = |\boldsymbol{a}_{\mathrm{D}}| > |\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}| = |\boldsymbol{a}_{\mathrm{P}}|$.

2. は, 2004/05/26 の 5.4–5.6 あたりののりです.

e^{-t} をひとかたまりに扱うと楽です. $(\mathrm{e}^{-t})^2 = \mathrm{e}^{-2t}$. また, x, y の値のとる範囲に注意しましょう. これは, 単純に t を消去しただけではわかりません.

点数のお知らせ

答案の返却とは無関係に, 各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040`*nnnx*`@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせしています. ここに届いたメールは, Web ページ

`http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/`

で見られます.

なお, メールでは平常点も通知しています.

物理数学☆演習 I 夏のプチテスト参加案内

樋口さぶろお[4]　配布: 2004 年 06 月 23 日更新: Time-stamp: ”2005/06/23 Thu 14:41 hig”

1. 座席指定にご協力してね.
2. 参照なしです.
3. 解答用紙 1 枚に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
4. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
5. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
6. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
7. 出席チェックするので学生証を机の上に出してね.
8. 携帯電話は (時計としても) 使わないでね.

答案の返却

答案の返却方法が前回と異なります. 2004/06/30(水) の授業で指定する日時場所に, 手渡しで返却を行います. 現時点の予定では, 2004/06/30(水) の昼休みと, 07/02(金) の昼休みまたは 3 講時に, 1-539 です. それ以降の返却は行いませんので注意してください.

点数のお知らせ

答案の返却とは無関係に, 各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040`*nnnx*`@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ

`http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/`

で見られます. 携帯メールなど, 他のアドレスで受け取りたい人は, ページ

`http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html`

(`http://hig3.net` からも行けます) の説明にしたがって, あらかじめ転送設定しておいてください.

なお, この試験の成績は, 科目の成績 100 点中 25 点分です.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

授業アンケートにご協力ください

B4 くらいの横長の固い紙です.

こんどは樋口が独自にやっているものではなく, 全学で一斉にやっているものです. 質問が一部重複していてごめんなさい.

Q13 個別質問 1　http://hig3.net からたどれる, 物理数学☆演習 I の Web ページを利用しましたか. (**印刷されている選択肢は無視して, 複数回答可で答えてください.**)

1. アニメの実行またはアプリのダウンロードに利用したことがある.
2. 欠席した回のノートを見るのに利用したことがある.
3. quiz の解答を見るのに利用したことがある.
4. 開いてみたことはあるが利用してはいない.
5. 開いてみたことがない.

Q14 個別質問 2　授業で紹介した i/V/EZ アプリを実行してみましたか (1 個だけマークしてください)

1. 実行してみた.
2. 自分の携帯が対応していないので実行してみていない.
3. ダウンロードの仕方がわからないので実行してみていない.
4. パケット通信料がかかるので実行してみていない.
5. 実行してみたいと思わないので実行してみていない.

Q15 個別質問 3　授業で紹介した i/V/EZ アプリを実行してみた方にうかがいます. これらは, あなたが授業内容の理解を深めるのに役立ったでしょうか (1 個だけマークしてください)

1. 非常に役立つ.
2. ある程度役立つ.
3. どちらともいえない.
4. あまり役立たない.
5. まったく役立たない.