

全体	目次	前回	次回	略解
----	----	----	----	----

 樋口さぶろお^a 更新 Time-stamp: "2004/05/22 Sat 14:14 hig"

物理数学 演習 I

- <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/> また, <http://hig3.net/> からもたどれます (下の QR コード). このページから匿名で質問, リクエストできます (携帯にも対応).

- このような文書を毎回配ります. 講義後は (たまたまに講義前にも) 上の Web page や 1-508 前の引き出しに置いてあります. 欠席した場合など, 必要な人は各自持って行ってください.



- 成績は授業中に行う プチトライアル+quiz 15 点, 春 (5 月) のプチテ

^aCopyright ©2003,2004 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.

スト 15 点, 夏 (6 月) のプチテスト 25 点, 期末試験 (7 月) 50 点の合計で評価します. 100 点以上は 100 点とみなします. プチテストの正確な日程は追って連絡します.

- quiz は授業の最後に (教科書参照, 相談ありで) 行う 20 分程度の演習, プチトライアルは授業の最初に (教科書参照, 相談なしで) 行う 10 分程度の演習です. 両方または片方を行います.
- 香中 p.99, 微分積分 p.123 はそれぞれ, 物理数学 演習 I のテキスト 香取-中野 物理数学の基礎, 微積分および演習のテキスト 戸田 基礎 微分積分の参照箇所を示します.
- TA 大槻真也さん (M2, 樋口研), 辻祐介さん (M2, 樋口研), 堀井智司さん (M2, 松木平研).
- 再履修の方へ: 2003 年度以前の内容と同じではありません.

1. 3次元のベクトルとその演算

1.1 ベクトルとスカラー

香中 p.2

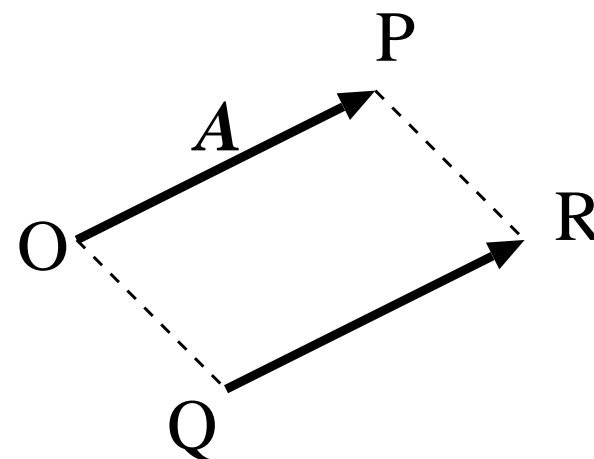
始点 を O , **終点** を P とする矢印を, ベクトル \overrightarrow{OP} という. $A = \overrightarrow{OP}$ などとかく.

この矢印のように, 大きさと方向の両方のある量を **ベクトル** という.

大きさだけのある量を, ベクトルに対して **スカラー** という.

大きさと向きが両方等しければ, (始点が違って
も) ベクトルは等しい. つまり, 1
して重なるようなベクトルは等しい.

$$A = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR}.$$



ベクトルの例: 風 (風向きと風力). スカラーの例: 温度.

記号の使い方

- ベクトルは r や A のような傾いた太い字 (または \vec{r} のように) で表わす.
- スカラーは r のような傾いた細い字で表わす.
- 点の名前や単位は O, P, Q, R, m, kg のように立った細い字で表す.

1.2 ベクトルの演算

香中 p.3

ベクトルの和

一般に, ベクトル $C = A + B$ とは, A と B を 2 辺とする平行四辺形の対角線のベクトル.

ベクトルとスカラーの積

ベクトル A とスカラー c の積 $B = c \times A$ は, ベクトルであり,

- 大きさは A の $|c|$ 倍.

- 向きは,

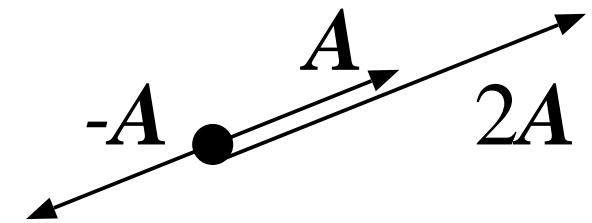
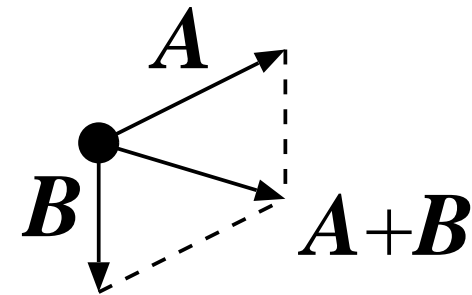
2

3

$c = 0$ なら,

あとで出てくるゼロベクトルになる.

ベクトルのスカラー倍ともいう.



- 0 (ゼロベクトル)

ベクトルの差

ベクトル A とベクトル B の差 $C = A - B$ とは、ベクトルであり、

$$C = A - B = A + ((-1) \times B) \quad (1)$$

ゼロベクトル

$A - A$ や、 $0 \times A$ は、ゼロベクトル 0 である。

ゼロベクトルは、大きさは 0 で、向きはない。

$$0 \times A = 0 \times B = A - A = B - B = 0. \quad (2)$$

ベクトル、スカラーについては、普通の数であるかのように展開して計算してよい。

例: $2(3A - B) = -2B + 6A.$

1.3 ベクトルの座標表示

香中 p.9

ベクトルを、やっぱり、絵じゃなく数字で表わしたい!

図のように、原点 O で垂直に交わる x -軸, y -軸を平面に描く. x -軸, y -軸には向きがあり, x -座標, y -座標がある. x -軸, y -軸に垂線を下ろして x -座標, y -座標をよみとる.

この

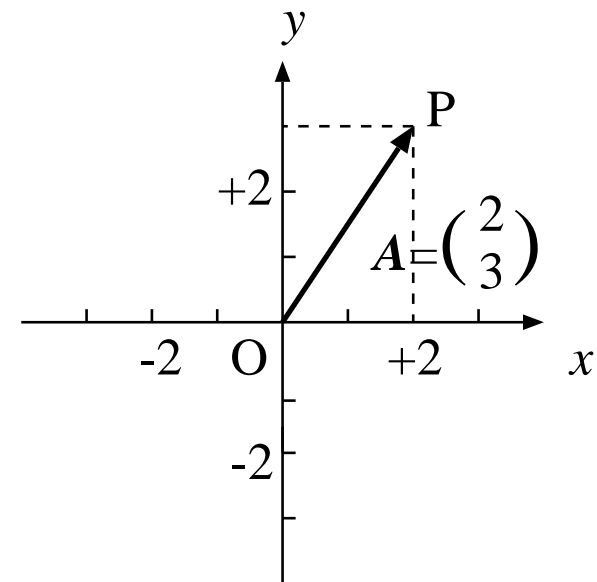
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \begin{array}{l} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \end{array} \quad (3)$$

を **ベクトルの座標表示** また

は **4** という. 2 を x 成分,

3 を y 成分という.

横に $A = (2, 3)$ のように書くこともある.



成分で書いた ベクトルの和とスカラー倍

ベクトル

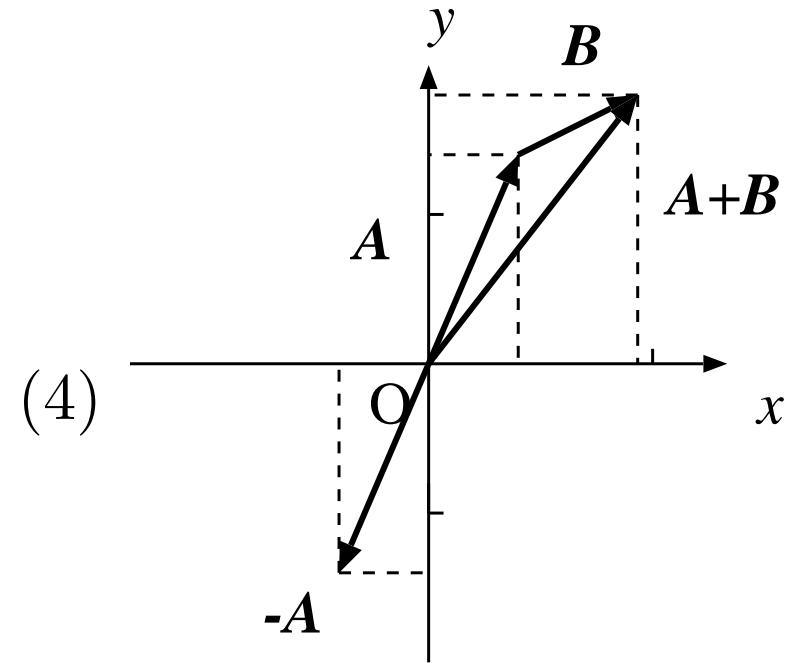
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}$$

とスカラー c に対して,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{6} \end{pmatrix}, \quad c \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} c \times A_x \\ c \times A_y \end{pmatrix}$$

(5)

である.



1.4 3次元の座標系

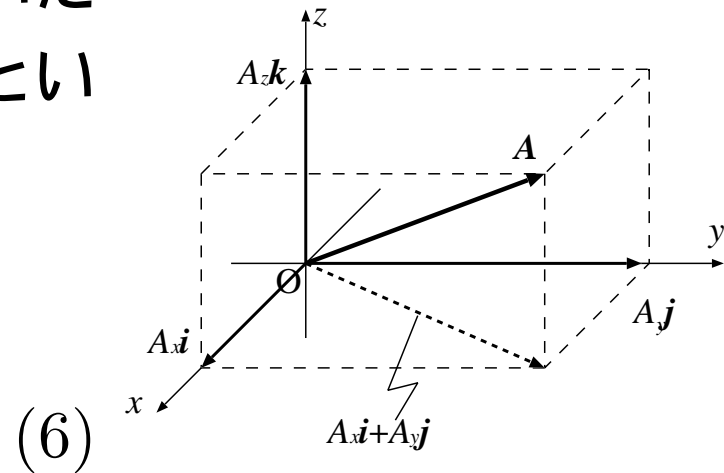
香中 p.13

互いに直交する x, y, z の3つの座標軸を使う. 普通, 右手を開いたときの親指方向を x , 人差し指方向を y , 中指方向を z 軸の正の方向にとる. これを 7 という.

左手を使うと, z 軸の向きが逆になる.

3次元のベクトル A の始点を原点に置いたとき, 終点の座標を A の x, y, z 成分といい, A_x, A_y, A_z と書く.

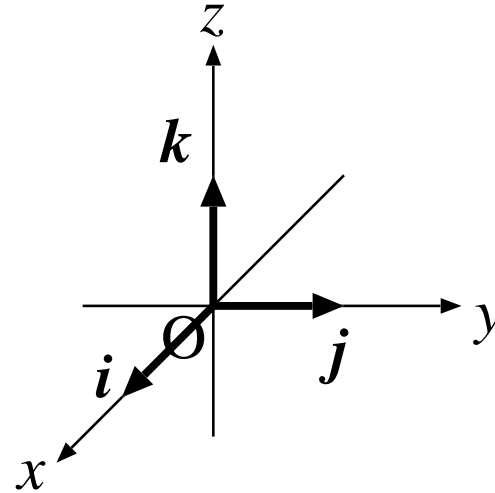
$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \begin{array}{l} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \\ z\text{-成分} \end{array}$$



1.5 基本ベクトル

香中 p.14

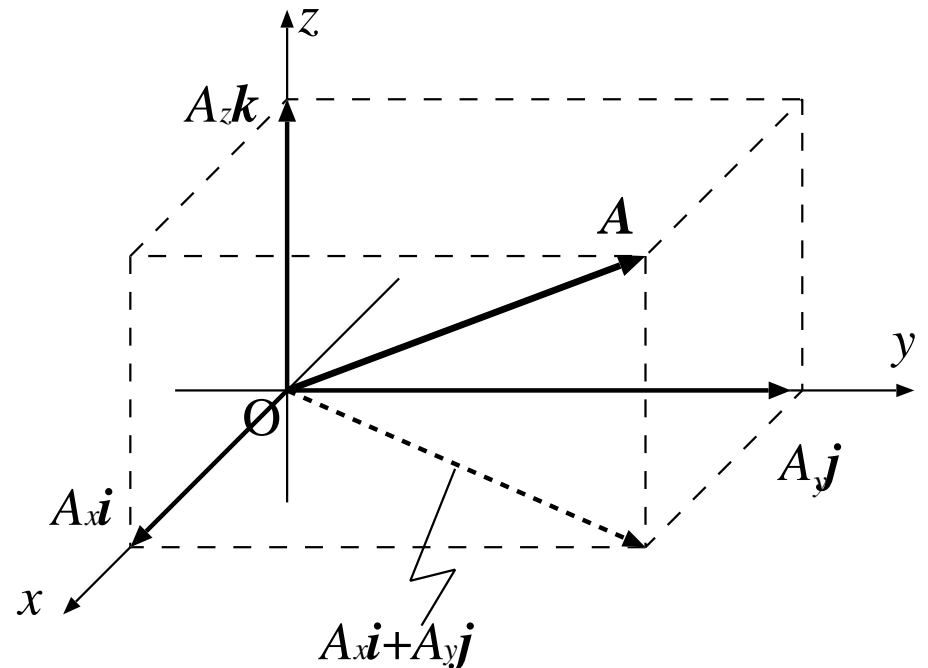
単位ベクトル: 大きさが 1 のベクトル.
 x, y, z 軸の正の向きの単位ベクトル
 を \mathbf{i} といい,



$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と書く. これらを用いると,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}. \quad (8)$$



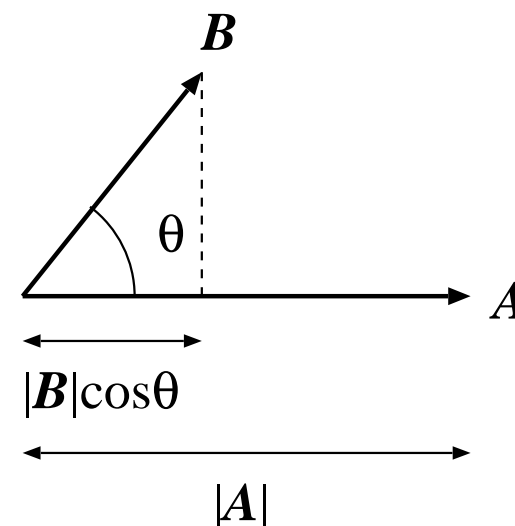
1.6 内積 (スカラー積)

香中 p.4

ベクトル A の大きさ (長さ, 絶対値) を $|A|$ と書く (絶対値と同じ記号). $|A|$ はスカラー (実数).

2つの3次元ベクトル A, B に対して, 次の式で計算されるスカラー $A \cdot B$ のことを **内積** という.

$$A \cdot B = |A| \times |B| \times \cos \theta. \quad (9)$$



ベクトル A, B, C , スカラー c に対して, 普通の数であるかのように,

$$(2A + B) \cdot A = 2A \cdot A + A \cdot B$$

のように展開したりしてよい.

基本ベクトル i, j, k は互いに直交していて大きさ 1 なので,

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1. \quad (10)$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = j \cdot i = k \cdot j = i \cdot k = 0. \quad (11)$$

内積 $A \cdot B$ の成分表示 香中 p.16

$$\begin{aligned}
 \boxed{A \cdot B} &= (A_x i + A_y j + A_z k) \cdot (B_x i + B_y j + B_z k) \\
 &= (A_x B_x i \cdot i + A_x B_y i \cdot j + A_x B_z i \cdot k) \\
 &\quad + (A_y B_x j \cdot i + A_y B_y j \cdot j + A_y B_z j \cdot k) \\
 &\quad + (A_z B_x k \cdot i + A_z B_y k \cdot j + A_z B_z k \cdot k) \\
 &= (A_x B_x \times 1 + A_x B_y \times 0 + A_x B_z \times 0) \\
 &\quad + (A_y B_x \times 0 + A_y B_y \times 1 + A_y B_z \times 0) \\
 &\quad + (A_z B_x \times 0 + A_z B_y \times 0 + A_z B_z \times 1) = \boxed{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \\
 &\hspace{20em} (12)
 \end{aligned}$$

仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.

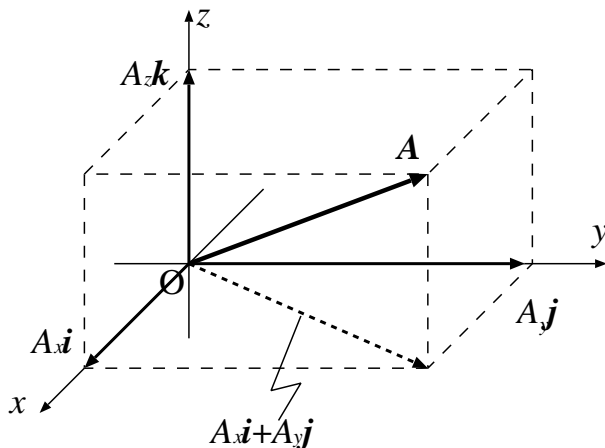
ベクトルの大きさ (内積の使い道 1)

三平方の定理を 2 回使うと, ベクトル A の絶対値は

$$|A| = \sqrt{\left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right)^2 + A_z^2} = \sqrt{\boxed{9}}. \quad (13)$$

ちょうど, $|A| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} = \sqrt{A \cdot A}$, 同じことだけど,

$$\boxed{|A|^2 = A \cdot A.} \quad (14)$$



内積の使い道 2: ベクトル A と B のなす角度

内積の定義の式 (9) を逆に使うと,

$$\cos \theta = \boxed{10} \quad (15)$$

で, ベクトル A と B のなす角度 θ が計算できる.

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. $A \cdot B$, $|A|$, および A, B のなす角 θ は?

1.7 外積 (ベクトル積)

香中 p.6

2つの3次元ベクトル A, B に対して、次の式で表わされるベクトル $C = A \times B$ のことを **外積** という。この記号 ‘ \times ’ は新しい記号。(実数のふつうの‘かける’とたまたま同じ文字)。

$$C = A \times B = |A| |B| (\sin \theta) \hat{C} \quad (16)$$

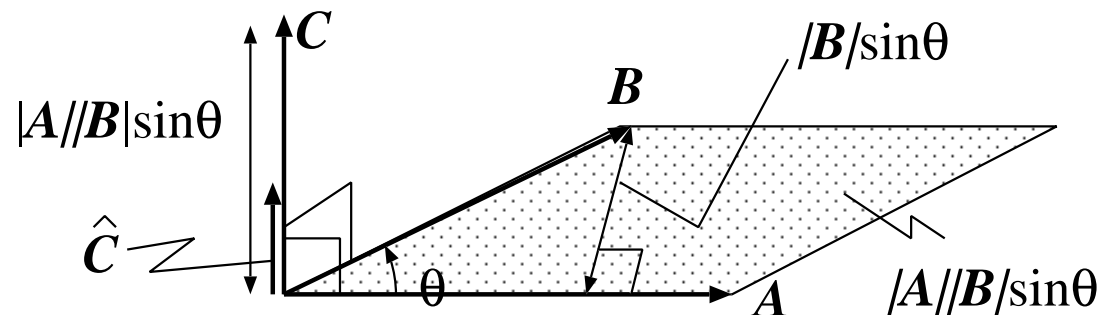
ただし、 \hat{C} は、 A と B の両方に垂直な単位ベクトルで、 A, B, C が右手系をなすようなもの。

向きの別の言い方: A から B に回る右ねじが進む向きの単位ベクトルが \hat{C} 。

つまり、向きは

$$A \times B \perp A, A \times B \perp B.$$

$$\text{大きさは } |A \times B| = |A| |B| \sin \theta.$$



計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい。ただし、

超注意 12 (17)

超注意. $\sin \theta = 0$ だから 13 (18)

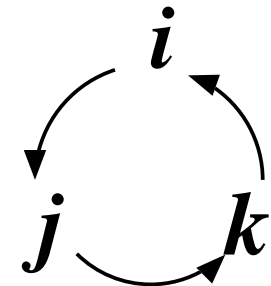
計算例 $(A + B) \times A = A \times A + B \times A = 0 - A \times B$ (19)

基本ベクトルの間の外積

$i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0.$ (20)

$i \times j = +k, \quad j \times k = +i, \quad k \times i = +j,$ (21)

$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j.$ (22)



i, j, k が **循環的** (cyclic) に入れ替わっていることに注意. $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$.

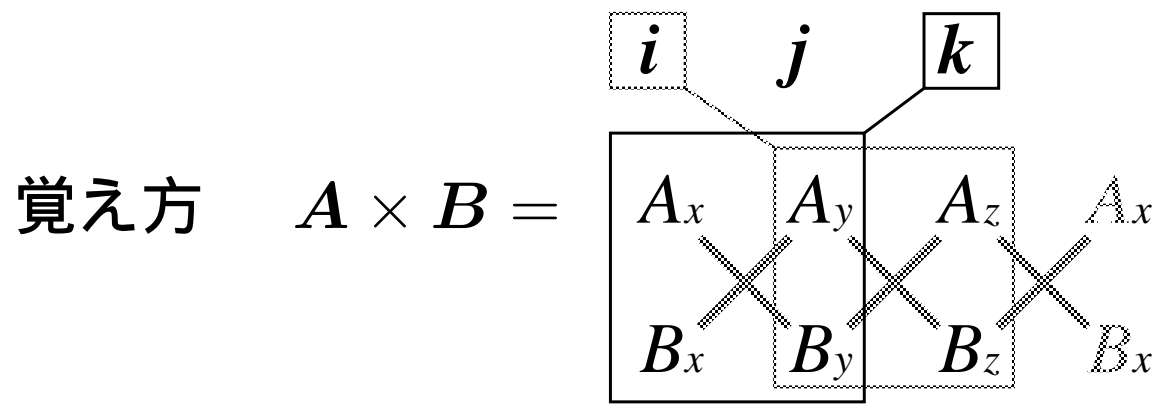
外積 $A \times B$ の成分表示 香中 p.16

$$\boxed{A \times B}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\
 &= (A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\
 &\quad + (A_y B_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_y B_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + A_y B_z \mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\
 &\quad + (A_z B_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + A_z B_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + A_z B_z \mathbf{k} \times \mathbf{k})
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$= \boxed{(A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}.}$$

x, y, z が循環的に入れ替わっていることに注意. $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.



例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ +5 \end{pmatrix}$ に対して, 外積 $B \times A$ を計算しよう.

14

フレミングの左手の法則とか, 外積で簡単に書ける: $F = I \times B$.

quiz 1

ベクトル $A = \begin{pmatrix} -3 \\ +4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} +5 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$ とスカラー $c = -3$ とする. ベクトル A, B の図を描こう. また,

$$A - 2B, c \times A, |A|, A \cdot B, A \times B$$

(の成分表示) を求めよう.

quiz について

- ほぼ毎回, 理解を確かめる quiz をします. 配った紙に解いてください. 感想や質問も書いてください. 提出は, フォルダーを学籍番号でグループ分けしています.
- 略解は今日中に Web に置きます.
- 紙は, チェックした後, 1-508 前の引き出しで返却します. ただし, 数週間以上経過したものは処分することがあります.

- 来週は講義の最初に内積外積のプチトライアルやります. 上の quiz がわかれば大丈夫です.
- 内積外積の答え合わせ用 i/V/EZ アプリ <http://hig3.net/> からたどってね.



i アプリ



V アプリ

EZ アプリ

<http://hig3.net/>